2007/08 - L1-PCP groupes 2 & 3 ~ Exercices supplémentaires fait en TD.

Espaces Vectoriels - matrices - Déterminant

<u>Exercice</u>: Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ défini par :

$f(e_1) = -e_2 + e_3 - e_4$, $f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3$, $f(e_3) = e_1 + e_4$, $f(e_4) = e_2 - e_3 + e_4$

1) Déterminer $f \circ f$, en déduire que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

2) Déterminer $\mathrm{Ker} f$, en déduire que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker} f$

<u>Exercice</u> : Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

1) Soient $r_1 \neq r_2$ deux réels. S'il existe v_1, v_2 non nuls tels que $Tv_1 = r_1 v_1$, $Tv_2 = r_2 v_2$ montrer que la famille $\{v_1, v_2\}$ ~~est~~ libre.

2) On suppose que la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ a) Calculer $T(x,y,z)$

b) $V_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : Tu = u\}$, $V_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : Tu = 2u\}$. Mq V_1 & V_2 sont deux sev de $\mathbb{R}^3$, preciser base et dim et mq $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$

<u>Exercice</u>: Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ définie par :

$$T(x,y,z,t) = (2x + y - 3z - 2t,\ 2x + y - 3z - 4t,\ 2x + y - 3z - 3t,\ 0)$$

1) matrice de T dans la base canonique $(e_i)_1^4$ de $\mathbb{R}^4$

2) Soient $a = (1,1,1,0)$, $b = (2,4,3,0)$ et $c = (3,0,2,0)$. Montrer que a et $b \in \mathrm{Im}\,T$ et forment une base de $\mathrm{Im}\,T$. T est-elle bijective ? $\dim \mathrm{Ker}\,T = ?$

3) MQ a et $c \in \mathrm{Ker}\,T$ et forment une base de $\mathrm{Ker}\,T$

4) Dimension et base de $\mathrm{Im}\,T \cap \mathrm{Ker}\,T$.

5) $e'_1 = b - e_1 - e_3$, $e'_2 = a$, $e'_3 = -b$, $e'_4 = e_4$. Montrer que $(e'_i)_1^4$ est une base de $\mathbb{R}^4$ calculer $T(e'_i)$ $i = 1..4$ en déduire la matrice de T dans la base $(e'_i)_1^4$

<u>Exercice</u>: Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ dont la matrice dans la base canoniques est

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que les vecteur $(1,1,1)$ $(1,j,j^2)$ $(1,j^2,j)$ constituent une base de $\mathbb{C}^3$ et donner la matrice de f dans cette base ($j = e^{2i\pi/3}$).

<u>Exercice</u>: Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\} \iff \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$$

$$\mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f = E \iff \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$$

Si $\dim E < \infty$ mq : $\mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f = E \iff \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$ et montrer que $T : \underset{a=}{(a_0, a_1, \dots)} \mapsto T(a) = (a_1, a_2, \dots)$ donne un contre exemple si E n'est pas de dimension finie.

<u>Exercice</u> : ① Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 0 & & a_n \\ & ⋰ & \\ a_1 \; a_2 & & 0 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \; , \; \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$$

preciser les valeurs des param. qui annulent ces det.

② Soit (A,B,C) un triangle, montrer que :

$$\begin{vmatrix} \tan(\hat{A}/2) & \cos(\hat{A}) & 1 \\ \tan(\hat{B}/2) & \cos(\hat{B}) & 1 \\ \tan(\hat{C}/2) & \cos(\hat{C}) & 1 \end{vmatrix} = 0$$