Agrégation interne de mathématiques – petits exercices électroniques

Exercice 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, établir l'équivalence des propriétés :
1) La seule valeur propre de A est 1.
2) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{tr}(A^n) = n$.

Exercice 2 : a) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x) + f(2x) = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
b) Soient $a, b, c > 0$ deux à deux distincts. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : a) Montrer que pour tout $0 < x < 1$

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = \int_{1-x}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,dt.$$

b) En admettant que $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que

$$f(1/2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\ln^2(2)}{2} - \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 4 : Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}^{\star +})$.
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, établir l'existence de $(a_{n,0}, \ldots, a_{n,n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$0 = a_{n,0} < \cdots < a_{n,n} = 1 \ \text{ et } \ \forall\, i \in \{0, \ldots, n-1\} \ : \ \int_{a_{n,i}}^{a_{n,i+1}} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)dt.$$

b) Déterminer la limite, quand n tends vers $+\infty$ de : $\dfrac{a_{n,0} + \cdots + a_{n,n}}{n+1}$.

Exercice 5 : Soient $A, H \in M_n(\mathbb{R})$, si $\mathrm{rg}(H) = 1$, montrer que

$$\det(A+H)\det(A-H) \leq (\det(A))^2.$$

29 février 2008 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
E-mail address: lassere@picard.ups-tlse.fr