Examen de Mathématiques

L1-PCP

19 mai 2008

Exercice 1 (Question de cours) Rappeler la formule donnant le déterminant du produit de deux matrices A et B de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. En déduire que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, et que dans ce cas, $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

Exercice 2 (Questions de cours) Enoncer le théorème de Rolle.

Exercice 3 Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ de la forme

$$\begin{bmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ b & b & a \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

On pose

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Montrer que A et B sont libres dans $M_3(\mathbb{R})$.
(2) Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$, en préciser un base et la dimension.
(3) Soit $\mathscr{F}$ un supplémentaire de $\mathscr{E}$ dans $M_3(\mathbb{R})$ (i.e. $\mathscr{E} \oplus \mathscr{F} = M_3(\mathbb{R})$). Quelle est la dimension de $\mathscr{F}$?
(4) Calculer

$$\Delta(a,b) := \det \begin{bmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ b & b & a \end{bmatrix}.$$

(5) Représenter graphiquement l'ensemble des couples (a, b) tels que $\Delta(a, b) = 0$.

Exercice 4 On note $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonique que $\mathbb{R}^3$ et soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ les vecteurs définis dans la base canonique par :

$$\mathbf{u} = (1/2, -1/2, 1/2)^\top, \quad \mathbf{v} = (1/2, 1/2, -1/2)^\top, \quad \mathbf{w} = (-1/2, 1/2, 1/2)^\top.$$

On note $\mathscr{B} := \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Soit enfin $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y - 3z \\ 3x + 3y - 3z \\ 2x + 4y - 2z \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(2) Donner la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{B}$, que l'on notera Q, puis la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{E}$ que l'on notera P.
(3) Donner la matrice A de f dans la base $\mathscr{E}$, puis la matrice B de f dans la base $\mathscr{B}$.
(4) Calculer les déterminants de P, Q et f. L'application f est-elle bijective ?

Exercice 5 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } x \in \left]-1, 1\right[, \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

On admettra que f est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$.
(1) Montrer que f admet un prolongement par continuité en -1 et en 1. Dans la suite, on notera encore f la fonction obtenue par prolongement.
(2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$.

(3) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, le rapport

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

peut se mettre sous la forme $(x+1) \cdot y(x) \exp y(x)$, où $y(x)$ est une fonction à déterminer. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? On justifiera soigneusement la réponse.

(4) En remarquant que

$$\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{1}{e} \exp\left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right),$$

calculer le développement limité d'ordre 4 de f en 0.

(5) En déduire les valeurs des dérivées successives de f en zéro, jusqu'à l'ordre 4.

Exercice 6 Etudier la limite en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{ch} x}{\sin x - x}.$$

Exercice 7 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

$$f(x) := \frac{x+3}{x(x-2)^2} \quad \text{et} \quad g(x) := \frac{x+1}{x(x^2+x+1)}.$$

En déduire les primitives de f et g, en précisant leurs domaines de définition.

Solution de l'exercice 3

(1) On sait qu'une matrice est nulle si et seulement si, ses coefficients sont nuls. Donc :

$$aA + bB = \begin{bmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ b & b & a \end{bmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0.$$

Les vecteurs A et B sont bien libres dans $M_3(\mathbb{R})$.

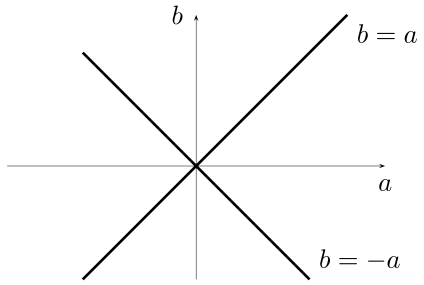
(2) Vu sa définition, $\mathscr{E}$ est le sous-espace vectoriel engendré par A et B qui forment donc une famille génératrice de $\mathscr{E}$; étant libre d'après la question précédente, $\{A, B\}$ est une base de $\mathscr{E}$ qui est de dimension 2.

(3) Si $\mathscr{F}$ est un supplémentaire de $\mathscr{E}$ dans $M_3(\mathbb{R})$, le cours nous assure que $\dim(\mathscr{E}) + \dim(\mathscr{F}) = 2 + \dim(\mathscr{F}) = \dim(M_3(\mathbb{R})) = 9$, soit $\dim(\mathscr{F}) = 7$.

(4)

$$\det \begin{bmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ b & b & a \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ b-a & a & a \\ 0 & b & a \end{bmatrix} = -(b-a) \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = (a-b)^2(a+b).$$

(5) Vu la question précédente, $\Delta_{a,b} = 0$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$, ce qui nous donne les deux bissectrices :



Solution de l'exercice 4

(1) Puisque $\operatorname{card} \mathscr{B} = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit de vérifier que $\mathscr{B}$ est libre. Or, l'équation vectorielle $\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{w} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ est équivalente à

$$\alpha(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \beta(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) + \gamma(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}.$$

Puisque $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est une base, cette équation est elle-même équivalente au système

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma & = & 0, \\ -\alpha + \beta + \gamma & = & 0, \\ \alpha - \beta + \gamma & = & 0. \end{cases}$$

L'unique solution de ce système étant $\alpha = \beta = \gamma = 0$, la famille $\mathscr{B}$ est une base.

(2) En notant id l'identité de $\mathbb{R}^3$, on obtient :

$$Q = \operatorname{pass}(\mathscr{E}, \mathscr{B}) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}}(id) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

puis, en utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss,

$$P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) On a :

$$A = \operatorname{mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = QAP = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4) On a $\det P = 2$, $\det Q = 1/2$ et $\det f = 0$. L'application f n'est pas bijective, puisque $\det f = 0$.

Solution de l'exercice 5

(1) La fonction f étant paire, il suffit de montrer que f est prolongeable par continuité en 1. Or,

$$\lim_{x \overset{\leq}{\to} 1} \frac{1}{1-x^2} = \infty, \quad \text{de sorte que} \quad \lim_{x \overset{\leq}{\to} 1} f(x) = 0 = \lim_{x \overset{\geq}{\to} 1} f(x).$$

Donc f peut être prolongée par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$.

(2) En utilisant la règle usuelle de dérivation des fonctions composées, on obtient, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right).$$

(3) On a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \frac{1}{x-1} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \\
&= (x+1) \cdot \frac{1}{x^2-1} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \\
&= (x+1) \cdot y(x) \exp y(x),
\end{aligned}$$

où l'on a posé $y(x) = 1/(x^2-1)$. Lorsque $x \xrightarrow{\leq} 1$, $y(x) \to -\infty$, de sorte que $y(x) \exp y(x) \to 0$. Ceci montre que

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad x \xrightarrow{\leq} 1.$$

Comme le même rapport est nul pour tout $x > 1$, la fonction f est dérivable en 1, de dérivée nulle.

(4) On utilise la règle de composition des développements limités. On obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \\
\frac{1}{1-x^2} &= 1 + x^2 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
1 - \frac{1}{1-x^2} &= -x^2 - x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
\exp\left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right) &= 1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
f(x) &= \frac{1}{e}\left(1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4\right) + x^4\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

(5) Puisque f est indéfiniment dérivable au voisinage de 0, f admet pour développement de Taylor d'ordre 4 en 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2} + f^{(3)}(0) \cdot \frac{x^3}{6} + f^{(4)}(0) \cdot \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x).$$

Le théorème d'unicité permet alors d'identifier les coefficients, et on trouve :

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = -\frac{2}{e}, \quad f^{(3)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(4)}(0) = -\frac{12}{e}.$$

Solution de l'exercice 6

Ecrivons les développements limités d'ordre 3 en 0 du numérateur et du dénominateur :

$$1 - \operatorname{ch} x = -\frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \sin x - x = -\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x).$$

On a donc :

$$1 - \operatorname{ch} x \sim_0 -\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \sin x - x \sim_0 -\frac{x^3}{6}.$$

On en déduit que

$$\frac{1-\operatorname{ch} x}{\sin x - x} \sim_0 -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{-6}{x^3} = \frac{3}{x},$$

et donc que f n'a pas de limite en 0.

Solution de l'exercice 7

On a $\mathscr{D}f =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, \infty[$, et

$$f(x) = \frac{x+3}{x(x-2)^2} = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{avec} \quad \deg P < \deg Q.$$

On en déduit que

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx}{x(x-2)^2}.$$

Par identification des coefficients du numérateur, on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} 0 &= A + B \\ 1 &= -4A - 2B + C \\ 3 &= 4A, \end{cases}$$

dont l'unique solution est : $A = 3/4$, $B = -3/4$, $C = 5/2$. On peut donc écrire :

$$f(x) = \frac{3}{4}\frac{1}{x} - \frac{3}{4}\frac{1}{(x-2)} + \frac{5}{2}\frac{1}{(x-2)^2}.$$

On en déduit que les primitives de f sont les fonctions de la forme

$$F(x) = \frac{3}{4}\ln|x| - \frac{3}{4}\ln|x-2| - \frac{5}{2}\frac{1}{x-2} + C = \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{5}{2}\frac{1}{x-2} + C,$$

où C est une constante réelle. Cette constante peut différer, selon que l'on considère F sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 2[$ ou sur $]2, \infty[$. Ensuite, $\mathscr{D}g = \mathbb{R}^*$, et

$$g(x) = \frac{x+1}{x(x^2+x+1)} = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{avec} \quad \deg P < \deg Q.$$

On en déduit que

$$g(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)x}{x(x^2+x+1)}.$$

Par identification des coefficients du numérateur, on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} 0 &= A + B \\ 1 &= A + C \\ 1 &= A, \end{cases}$$

dont l'unique solution est : $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$. On peut donc écrire :

$$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+x+1}.$$

On en déduit que les primitives de g sont les fonctions de la forme

$$\begin{aligned} G(x) &= \ln|x| - \int \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + C \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + C \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\,\mathrm{d}x + C \\ &= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3/4}}\operatorname{Arctg}\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}} + C \\ &= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

où C est une constante réelle. Cette constante peut différer, selon que l'on considère G sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, \infty[$.