Agrégation Interne **2006/2007**

Samedi 25 novembre 2006 : second devoir en salle

1. Quelques notations

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^n([-1,1])$ désigne l'espace vectoriel des applications $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ de classe C^n. Pour $f \in \mathscr{C}^0([-1,1])$ on pose

$$\|f\|_0 = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$$

puis, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\|f\|_n = \max_{0\leq k\leq n} \|f^{(k)}\|_0, \quad f \in \mathscr{C}^n([-1,1]).$$

- Pour $f \in \mathscr{C}^n([-1,1]),\ (n \in \mathbb{N})$ et $g \in \mathscr{C}^n([-1,1]),\ (n \in \mathbb{N}^\star)$ on pose

$$A_n(f)(x) = xf(x) \quad \text{et} \quad B_n(g)(x) = \int_0^1 g'(xt)dt, \quad \forall\, x \in [-1,1].$$

- Enfin on désignera, comme le veut la coutume par $\mathscr{C}^\infty([-1,1]) = \bigcap_{n\geq 0} \mathscr{C}^n([-1,1])$ l'espace vectoriel des fonctions $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ sur $[-1,1]$ et pour $f \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])$ on posera

$$\delta(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_n}{1+\|f\|_n}.$$

Et par analogie avec $\mathscr{C}^n([-1,1])$, on définit les endomorphismes de $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$ par

$$A(f)(x) = xf(x), \text{ et } B(f)(x) = \int_0^1 f'(xt)dt, \quad \forall\, x \in [-1,1],\ f \in \mathscr{C}^\infty([-1,1]).$$

2. Première partie

(1) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathscr{C}^n([-1,1]),\ \|\cdot\|_n)$ est un espace de Banach.

(2) Calculer $\|x^p\|_n$ pour $n, p \in \mathbb{N}$.

(3) Montrer que A_n est une application linéaire continue de $\mathscr{C}^n([-1,1])$ dans lui-même et préciser sa norme.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que B_n est une application linéaire continue de $\mathscr{C}^n([-1,1])$ dans $\mathscr{C}^{n-1}([-1,1])$ et préciser sa norme.

(5) Calculer les « produits » $B_n \circ A_n$ et $A_{n-1} \circ B_n$ applications de $\mathscr{C}^n([-1,1])$ dans $\mathscr{C}^{n-1}([-1,1])$.

(6) On se propose dans cette question de démontrer que le sous-espace image $\mathrm{Im(A_n)}$ est le sous-espace $\mathscr{F}_n$ de $\mathscr{C}^n([-1,1])$ défini par

$$\mathscr{F}_n := \left\{ g \in \mathscr{C}^n([-1,1]) \ : \ g(0) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} \text{ existe} \right\}.$$

(7-a) Traiter le cas $n = 0$.

On suppose dorénavant $n \in \mathbb{N}^\star$.

(7-b) Vérifier que $\mathrm{Im}(\mathrm{A_n}) \subset \mathscr{F}_\mathrm{n}$.

(7-c) Soit $g \in \mathscr{F}_n$. Montrer que $f = B_n(g)$ est de classe C^n sur $[-1,1] \setminus \{0\}$. On pourra commencer par montrer que

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \int_0^1 t^n \frac{g^{(n)}(xt) - g^{(n)}(0)}{xt} dt, \quad \forall\, x \in [-1,1] \setminus \{0\}.$$

(7-d) Montrer que $f^{(n-1)}$ est dérivable à l'origine.

(7-e) Montrer que $f^{(n)}$ est continue à l'origine et conclure.

3. Seconde partie

(7) Pour $f, g, h \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])$ montrer que

$$\delta(f-h) \leq \delta(f-g) + \delta(h-g).$$

(8) Soient f, f_k ($k \in \mathbb{N}$) des éléments de $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\rightsquigarrow$ $\lim_{k\to\infty} \delta(f - f_k) = 0$.
- $\rightsquigarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(f_k^{(n)})_k$ converge uniformément vers $f^{(n)}$ sur $[-1,1]$.

(9) Si on pose $d(f,g) = \delta(f-g)$ montrer que $(\mathscr{C}^\infty([-1,1]), d)$ est un espace métrique complet.

(10) Déterminer $A \circ B$ et $B \circ A$.

(11) Déterminer les noyaux et les images de A et B.

(12) On se propose de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$B^n(g)(x) = \int_0^1 \varphi_n(t) g^{(n)}(xt) dt, \quad \forall\, g \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])$$

où $B^n = B \circ \cdots \circ B$ (n fois) et $\varphi_n(t) = \dfrac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}$. On procède par récurrence sur $n \geq 1$.

(12-a) Traiter le cas $n = 1$.

(12-b) Montrer que $H(x) := \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(t) g^{(n)}(xt) dt \in \mathscr{C}^0([-1,1])$.

(12-c) Montrer que $xH(x) = B^{(n-1)}(g)(x) - B^{(n-1)}(g)(0)$.

(12-d) Conclure.

(13) Calculer $B^n(g)(0.)$

(14) Soit g fixé dans $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$. Montrer que

$$A^n B^n(g)(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad \forall\, x \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}^\star.$$

On pourra procéder par récurrence sur n en écrivant $A^{n+1}B^{n+1} = A^n ABB^n$.

(15) Déduire de ce qui précède une démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral.

(16) Montrer que $\mathrm{Im}(A^n) = \mathrm{Im}(A^n B^n)$ et déterminer l'image de A^n et le noyau de B^n.

4. Troisième partie

On dira qu'une forme linéaire T sur $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$ est continue si $\lim_n \delta(f_n - f) = 0$ *implique* $\lim_n T(f_n) = T(f)$ *et on écrira alors $T \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in [-1,1]$ on désigne par $T_{\alpha,i}$ la forme linéaire*

$$\mathscr{C}^\infty([-1,1]) \ni f \mapsto T_{\alpha,i}(f) = f^{(i)}(\alpha).$$

(17) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in [-1,1]$, $T_{\alpha,i} \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$.

(18) Soit $T \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$, montrer que $T \circ A$ et $T \circ B \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$. On désignera dans la suite par respectivement $A' : T \mapsto T \circ A$ et $B' : T \mapsto T \circ B$ les endomorphismes de $\mathscr{C}^\infty([-1,1])'$ ainsi définis.

(19) Montrer que $A'B' = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}^\infty([-1,1])'}$.

(20) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $\mathrm{Im}(\mathrm{A}')^{\mathrm{n}}$ et $\ker(B')^n$; montrer que les formes $(T_{0,i})_{i=0}^{n-1}$ constituent une base de $\ker(A')^n$.

(21) Déterminer les formes $T \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$ solutions de l'équation $(A')^n(T) = T_{0,0}$.

Étant donné $\alpha \in \mathbb{C}$, on désigne par S_α l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$ défini par

$$S_\alpha(f)(x) = (x - \alpha)f(x), \quad x \in [-1,1],\ f \in \mathscr{C}^\infty([-1,1]).$$

On pourra admettre les deux résultats suivants :

$\rightsquigarrow$ *$U \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$ implique $U \circ S_\alpha \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$. On notera $S'_\alpha : U \mapsto U \circ S_\alpha$ l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty([-1,1])'$ ainsi défini.*

$\rightsquigarrow$ *Pour $\alpha \in [-1,1]$, $(S'_\alpha)^n$ est surjectif et $\ker((S'_\alpha)^n)$ admet pour base $\{\, T_{\alpha,i},\ (0 \leq i \leq n-1)\}$.*

(22) Soient G un espace vectoriel, $L_1, \dots, L_r$ des endomorphismes de G commutant deux à deux et tels que, pour $i \neq j$:

$$\ker(L_i) = L_j(\ker(L_i)).$$

Montrer que

$$\ker(L_1 \circ \cdots \circ L_r) = \ker(L_1) + \cdots + \ker(L_r).$$

(23) Soit $Q \in \mathbb{C}[x]$, notons T_Q l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$ défini par $T_Q(f)(x) = Q(x)f(x)$. Montrer que $U \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$ implique $U \circ T_Q \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$. On note T'_Q l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$ ainsi défini.

(24) Préciser l'image de T'_Q et donner une base de son noyau.

14 décembre 2006 — Lassère Patrice : Laboratoire de Mathématiques, E.Picard
UMR CNRS 5580. Université Paul Sabatier 119 route de Narbonne 31062 TOULOUSE FRANCE.
lassere@picard.ups-tlse.fr & lassere@wanadoo.fr