<u>**AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES**</u>

L'INTÉGRALE DE DIRICHLET $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

PATRICE LASSÈRE

Résumé. Afin de bien réviser l'intégration et plus précisément les intégrales à paramétres, amusons nous avec plusieurs méthodes de calcul pour l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

1. Préliminaires

La convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est classique : il n'y a pas de problèmes à l'origine car $t \mapsto \sin(t)/t$ s'y prolonge continuement, le seul problème est donc en $+\infty$. Intégrable sur $[0,1]$, il est suffisant de s'assurer de la convergence sur $[1,+\infty[$: soit $x>1$, une intégration par parties donne

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_0^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

lorsque x tends vers $+\infty$ le terme « entre crochets » tends vers $\sin(1)$ et le second (puisque $|\cos(t)/t^2| \leq t^{-2} \in L^1([1,+\infty[))$ vers $\int_1^\infty \cos(t)/t^2 dt \in \mathbb{R}$. Par conséquent $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.

Par contre l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin(t)}{t}|dt$ diverge, pour s'en convaincre le méthode classique consiste à écrire pour tout entier $N \geq 2$

$$\begin{aligned}\int_1^N \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt &\geq \sum_{k=1}^N \int_{k\pi+\pi/4}^{k\pi+3\pi/4} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt\\ &\geq \sum_{k=1}^N \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{k\pi+\pi/4}^{k\pi+3\pi/4} \frac{dt}{t}\\ &\geq \sum_{k=1}^N \frac{\pi\sqrt{2}}{k\pi+3\pi/4} \geq \sqrt{2}\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \nearrow +\infty.\end{aligned}$$

D'où la non absolue intégrabilité (tout ceci bien entendu marche aussi pour les intégrales $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin(t)}{t^\alpha}|dt,\ \alpha \in]0,1]$...).

On peut aussi plus simplement écrire

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geq \left|\frac{\sin^2 t}{t}\right| = \frac{1-\cos 2t}{2t} := g(t) \geq 0$$

et observer que g n'est pas intégrable en $+\infty$ (en effet, $\cos 2t/t$ l'est pour les mêmes raisons que $\sin t/t$ mais pas $1/t$...) ce qui, via les théorèmes de comparaison pour les fonctions positives assure la non-intégrabilité de $t \mapsto |\frac{\sin(t)}{t}|$ en l'infini.

Pour terminer, remarquons que par une intégration par parties légitime

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right] + \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt$$

d'où la remarquable[1] formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt.$$

2. Calculs de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

Exercice 1 : Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)} dt$.
1) Préciser le domaine de définition de F.
2) Étudier la continuite et l'existence des dérivées premières et secondes.
3) Exprimer $F(x)$ en fonction de $C := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$
4) En déduire la valeur de C.

Solution : L'intégrale définissant F est clairement convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$: F est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire. Posons $f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}$.

➪ Soit $a > 0$, pour $x \in [-a, a]$ et $t \in \mathbb{R}_+$ on a

$$|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(xt)}{t} \cdot \frac{1}{t^2+1}\right| \leq \frac{|x|}{t^2+1} \leq \frac{a}{t^2+1} \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

vu la régularité de f le théorème de continuité des intégrales à paramètres assure que $F \in \mathscr{C}^0([-a, a])$, et ceci pour tout $a > 0$: F est donc continue sur $\mathbb{R}$.

[1]On a aussi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi}{2}$

➪ $\partial_x f(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{t^2+1}$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$

$$|\partial_x f(x,t)| = \left|\frac{\cos(xt)}{t^2+1}\right| \leq \frac{1}{t^2+1} \in L(\mathbb{R}),$$

par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t^2+1} dt.$

➪ Pour l'existence de la dérivée seconde l'affaire est plus délicate, car

$$\left|\partial_x^2 f(x,t)\right| = \left|\frac{-t\sin(xt)}{t^2+1}\right| \underset{t\to\infty}{\sim} \left|\frac{\sin(xt)}{t}\right|,$$

et cette dernière n'est (comme $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$) pas intégrable en $+\infty$: toute tentative de domination (même locale) pour appliquer le théorème précédent est donc vaine. L'astuce constiste par une intégration par parties à écrire F' sous une forme acceptable pour justifier la dérivation sous l'intégrale :soit $x \in \mathbb{R}^\star$:

$$\begin{aligned} F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t^2+1} dt &= \left[\frac{\sin(xt)}{x(t^2+1)}\right]_0^\infty + \int_0^{+\infty} \frac{2t\sin(xt)}{x(t^2+1)^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2t\sin(xt)}{x(t^2+1)^2} dt. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \neq 0$ on a

$$(\text{✘}) \qquad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t^2+1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t\sin(xt)}{x(t^2+1)^2} dt$$

sous cette seconde forme, on va pouvoir appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, en effet soit $a > 0$, pour $x \geq a$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2t}{x} \cdot \frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2}\right)\right| &\leq \left|\frac{2t}{x^2} \cdot \frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2}\right| + \left|\frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2}\right| \\ &\leq \frac{|2t|}{a^2(t^2+1)^2} + \frac{2t^2}{a(t^2+1)^2} \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

on peut donc dériver sous l'intégrale : F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{2t}{x^2} \cdot \frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2}\right) dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^\star.$$

Cette expression est un peu chargée, faisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
F''(x) &= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{2t}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{\sin(xt)}{x^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2} \right) dt \\
&= \left[\frac{\sin(xt)}{x^2(t^2+1)} - \frac{t\cos(xt)}{x(t^2+1)} \right]_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} \left(\frac{x\cos(xt)}{x^2(t^2+1)} - \frac{\cos(xt) - xt\sin(xt)}{x(t^2+1)} \right) dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{t^2+1} dt.
\end{aligned}$$

Il est intéressant à ce stade d'observer que nous retrouvons finalement la formule

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^\star,$$

mais pour justifier une dérivation sous l'intégrale une transformation de F' (voir (✘)) à été nécessaire ; remarquez aussi que l'existence de $F''(0)$ reste ouverte. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t^2+1} dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \\
F''(x) &= -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{t^2+1} dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^\star.
\end{aligned}$$

➪ Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$\begin{aligned}
F(x) - F''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{x(t^2+1)} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} dt = \begin{cases} C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star, \\ -C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_-^\star. \end{cases}
\end{aligned}$$

F est donc solution de l'équation différentielle $F - F'' = C$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $F - F'' = -C$ sur $\mathbb{R}_-^\star$ ce qui nous donne

$$F(x) = \begin{cases} ae^x + be^{-x} + C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star, \\ ce^x + de^{-x} - C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_-^\star. \end{cases}$$

(remarquez que ces équations impliquent $\lim_{0_+} F''(x) = C = -\lim_{0_-} F''(x)$ qui assurent si $C \neq 0$ que F'' admet à l'origine des limites à droite et à gauche différentes ce qui (propriété classique de l'application dérivéée, Darboux par exemple) nous permet d'affirmer que $F''(0)$ n'existe pas mais F' est tout de même dérivable à droite et à gauche en 0 avec $F''(0_+) = C = -F''(0_-)$...) F étant impaire, $a = -d, b = -c$ soit

$$F(x) = \begin{cases} ae^x + be^{-x} + C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star, \\ -be^x - ae^{-x} - C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_-^\star \end{cases}$$

et F continue à l'origine avec $F(0) = 0$ implique

$$F(0) = 0 = \lim_{x\to 0_+} F(x) = a + b + C = \lim_{x\to 0_-} F(x) = -a - b - C$$

soit $a + b = -C$; de même, F' continue à l'origine avec $F'(0) = \pi/2$ donne $a - b = \pi/2$ i.e. $2a = \pi/2 - C, 2b = -C - \pi/2$ et finalement

(✔) $$F(x) = \frac{\pi}{2}\text{sh}(x) - C\text{ch}(x) + C, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

➪ Il reste à évaluer C. Pour cela, montrons que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = C$. Soit $x > 0$,

$$F(x) - C = F''(x) = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{2t}{x^2}\cdot\frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2}\right) dt$$

(on a encore ici besoin de la première expression de F'' pour conclure facilement) pour $x \geq a > 0$, on a la domination

$$\left|-\frac{2t}{x^2}\cdot\frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2}\right| \leq \frac{2t}{a^2(t^2+1)^2} + \frac{2t^2}{a(t^2+1)^2} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Donc par le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{x\to+\infty}(F(x) - C) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2t}{x^2}\cdot\frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2}\right) dt = 0$$

soit avec (✔)

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = C \quad \text{et} \quad F(x) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2} - C\right) e^x + C$$

qui donnent

$$C = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

C.Q.F.D. ❑

Exercice 2 : On considère l'application $f(x) := \int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} e^{-xt}dt$.
1) Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.
2) En déduire une forme explicite de f sur $\mathbb{R}_+^\star$.
3) Montrer que f est continue à l'origine.
4) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Solution : 1) Écrivons $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ où $g(x,t) = e^{-xt}\frac{sin(t)}{t}$. Pour $x = 0$, $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ et nous retrouvons l'intégrale de Dirichlet ; pour $x > 0$, comme $|g(x,t)| \leq e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, f est encore bien définie : f est finalement définie sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $a > 0$, nous avons

$$|g(x,t)| \leq e^{-at} \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leq e^{-at} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

De ces deux inégalités, le théorème de continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres assure que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad f'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt.$$

🛈 **Remarque :** Il faut se garder, malgré les questions suivantes, de vouloir par ces théorèmes de domination obtenir la continuité de f à l'origine : en effet f est à l'origine définie par l'intégrale de Dirichlet qui est notoirement non absolument convergente et une domination de g dans un voisinage de l'origine impliquerai assurément l'absolue convergence. C'est pourquoi d'ailleurs les dominations n'ont lieu que sur $[a, +\infty[$...

2) L'expression de $f'(x)$ que nous venons d'obtenir nous permet un calcul explicite : soit $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt &= -\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} \left(e^{it} - e^{-it}\right)e^{-xt}dt \\ &= -\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} \left(e^{t(i-x)} - e^{-t(i+x)}\right)dt \\ &= -\frac{1}{2i}\left(\left[\frac{e^{t(i-x)}}{i-x}\right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-t(i+x)}}{i+x}\right]_0^\infty\right) \\ &= -\frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{i-x} - \frac{1}{i+x}\right) = -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

(les deux termes « entre crochets » sont nuls à l'infini car par exemple $|\frac{e^{-t(i+x)}}{i+x}| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{x^2+1}} \to 0$ lorsque t tends vers $+\infty$....). En intégrant cette formule, il vient

$$\exists\, C \in \mathbb{R} \ :\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star \qquad f(x) = -\arctan(x) + C.$$

La constante C n'est pas difficile à déterminer, en effet la formule ci-dessus implique que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + C$$

et pour tout $x > 0$

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

soit

$$-\frac{\pi}{2} + C = 0 \qquad \text{et} \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

Résumons nous :

$$(✘) \qquad f(x) = \begin{cases} -\arctan(x) + \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } x > 0 \\ \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3) Il s'agit de montrer que

$$\lim_{x\to 0_+} |f(x) - f(0)| = \lim_{x\to 0_+} \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \left(e^{-xt} - 1\right) \right| dt = 0.$$

Cette limite n'est pas triviale, on va faire une intégration par parties : considérons pour $t > 0$, $G(t) = \int_t^{\infty} \frac{\sin(u)}{u}du$. G est dérivable et $G'(t) = -\frac{\sin(t)}{t}$, en outre la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ implique $\lim_{t\to\infty} G(t) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \left(e^{-xt} - 1\right) \\ &= -\int_0^{+\infty} G'(t) \left(e^{-xt} - 1\right) \\ &= \left[G(t) \left(e^{-xt} - 1\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} G(t)xe^{-xt}dt \\ &\underset{u=xt}{=} -\int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u}du := -\int_0^{+\infty} H(x,u)du \end{aligned}$$

et la fonction

$$H(x,u) = \begin{cases} G\left(\dfrac{u}{x}\right) e^{-u} & \text{si } \ x \neq 0, \\ 0 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^\star$ (la continuité en $(0,u)$ découle de $\lim_{t\to\infty} G(t) = 0$) ; elle est aussi dominée par

$$|H(x,u)| \leq e^{-u} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Donc par convergence dominée

$$(✔) \qquad \lim_{x\to 0_+} |f(x) - f(0)| = \lim_{x\to 0} \left| -\int_0^{+\infty} H(x,u)du \right| = \left| -\int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0} H(x,u)du \right| = 0.$$

f est donc bien continue à l'origine.

4) (✘) et (✔) donnent immédiatement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

❏

Exercice 4 : Soient $f(x)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+x}dt,\ g(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{t^2+1}dt.$

1) Montrer que $f,g\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^\star)$ (pour f, on pourra commencer par montrer que $f(x)=\int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}dt$).
2) Montrer que f et g sont solutions de l'équation différentielle $y''+y=1/x$.
3) En déduire que $f-g$ est 2π-périodique (sur son domaine de définition).
4) Montrer que f et g sont équivalentes à $1/x$ en $+\infty$ puis, que $f=g$.
5) En déduire la valeur que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$

Solution : 1) et 2) Ces intégrales impropres sont clairement convergentes pour tout $x\in\mathbb{R}_+$; posons pour $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$: $f(x,t)=\sin(xt)/t+x, g(x,t)=e^{-tx}/t^2+1$. Les dominations

$$\begin{aligned}
&|g(x,t)|\leq\frac{1}{1+t^2},\quad \forall t\in\mathbb{R}_+,\\
&\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\right|\leq\frac{te^{-at}}{1+t^2}\in L^1(\mathbb{R}_+),\quad \forall x\geq a>0,\\
&\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2}\right|\leq\frac{t^2e^{-at}}{1+t^2}\in L^1(\mathbb{R}_+),\quad \forall x\geq a>0,
\end{aligned}$$

assurent par convergence dominée que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec

$$g'(x)=-\int_0^\infty \frac{te^{-xt}}{t^2+1}dt,\ g''(x)=\int_0^\infty \frac{t^2e^{-xt}}{t^2+1}dt,\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^\star.$$

On en déduit immédiatement que $g''(x)+g(x)=1/x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Pour f c'est un peu plus délicat car l'application $t\mapsto f(x,t)$ est notoirement non absolument intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et toute domination est veine, on commence donc par une intégration par parties pour obtenir une expression plus exploitable de f.

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+x}dt=\left[\frac{1-\cos(t)}{t+x}\right]_0^\infty+\int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}dt=\int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}dt$$

(afin d'alléger les calculs on a choisi $1-\cos(t)$ comme primitive de $\sin(t)$ choix qui annule le « terme entre crochets »). De là, si $h(x,t)=1-\cos(t)/(t+x)^2$ et pour $x\geq a>0$

$$\begin{aligned}
&\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right|=\left|-\frac{2(1-\cos(t))}{(t+x)^3}\right|\leq\frac{2}{(t+a)^3}\in L^1(\mathbb{R}_+),\quad \forall x\geq a>0,\\
&\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}\right|=\left|\frac{6(1-\cos(t))}{(t+x)^4}\right|\leq\frac{12}{(t+a)^3}\in L^1(\mathbb{R}_+),\quad \forall x\geq a>0,
\end{aligned}$$

ces dominations impliquent que $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^\star)$ avec

$$f''(x) = \int_0^\infty \frac{6(1-\cos(t))}{(t+x)^4}dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star$$

et avec une intégration par parties

$$\begin{aligned} f''(x) &= \int_0^\infty \frac{6(1-\cos(t))}{(t+x)^4}dt = \left[-\frac{2(1-\cos(t))}{(t+x)^3}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2\sin(t)}{(t+x)^3}dt \\ &= \left[-\frac{\sin(t)}{(t+x)^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}dt = \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}dt \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{(t+x)^2} - \int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}dt \\ &= \frac{1}{x} - f(x), \quad x > 0. \end{aligned}$$

3) f et g sont solutions sur $\mathbb{R}_+^\star$ de l'équation $y''+y = 1/x$, $f-g$ est donc solution de l'équation $y''+y=0$: c'est la restriction à $\mathbb{R}_+^\star$ d'une solution sur $\mathbb{R}$ de $y''+y=0$ donc 2π-périodique.

4) Soit $x > 0$, vu ce qui précède

$$f(x) = \frac{1}{x} - \int_0^\infty \frac{2\sin(t)}{(t+x)^3}dt$$

et comme

$$\left|\int_0^\infty \frac{2\sin(t)}{(t+x)^3}dt\right| \leq \int_0^\infty \frac{2dt}{(t+x)^3} = \frac{2}{x^2} = o(x^{-1})$$

i.e.

$$f(x) = \frac{1}{x} + o(x^{-1}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Pour g, on procède de même encore plus simplement.

Sur $\mathbb{R}_+^\star$, $f-g$ est continue 2π-périodique et tends vers 0 en $+\infty$: elle est donc identiquement nulle et on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+x}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{t^2+1}dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

5) Pour conclure, voir l'exercice précédent. ❏

Exercice 3 : Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x\cos(t)}\cos(x\sin(t))dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$$

et en déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^{-x\cos(t)}\cos(x\sin(t))dt &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2} e^{-x\cos(t)}e^{ix\sin(t)}dt\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2} e^{-xe^{-it}}dt\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n e^{-int}}{n!}dt\right)\\
&= \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\int_0^{\pi/2}\mathrm{Re}\left(e^{-int}\right)dt\\
&= \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2}\\
&= \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}\\
&= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{2k+1}\\
&= \frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}\\
&= \frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{dt}{t}\\
&= \frac{\pi}{2}-\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{dt}{t}\\
&= \frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}dt.\end{aligned}$$

Les deux échanges $\int\sum=\sum\int$ sont justifiés par la normale convergence des deux séries entières sur le domaine d'intégration (leur rayon de convergence étant infini).

➪ Une convergence dominée élémentaire[2] $\left(\left|e^{-x\cos(t)}\cos(x\sin(t))\right|\leq 1\in L^1([0,\pi/2])\right)$ implique

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-x\cos(t)}\cos(x\sin(t))dt=0,$$

[2] que l'on peut aussi éviter en coupant l'intégrale en deux...

soit, vu la formule établie au dessus

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt\right)=0$$

et par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$ ❏

Exercice 5 : (avec des intégrales doubles-1) En intégrant $f(x,t) = e^{-xy}sin(x)$ sur $[\epsilon, T] \times [0, +\infty[$, $0 < \epsilon < T$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt.$

Solution : Soient $0 < \varepsilon < T$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^T \frac{\sin(x)}{x}dx &= \int_\varepsilon^T \sin(x)\left(\int_0^\infty e^{-xy}dy\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_\varepsilon^T \sin(x)e^{-xy}dx\right)dy \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-y\varepsilon}(\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon) - e^{-yT}(\cos T + y\sin T)}{y^2+1}dy \\
&= \int_0^\infty g_{\varepsilon,T}(y)dy
\end{aligned}$$

l'application ci-dessus du théorème de Fubini est justifiée par $|f(x,y)| \le e^{-xy}$ et

$$\int_\varepsilon^T \left(\int_0^\infty e^{-xy}dy\right)dx = \int_\varepsilon^T \left[-\frac{e^{xy}}{x}\right]_0^\infty dx = \int_\varepsilon^T \frac{dx}{x} = \log\frac{T}{\varepsilon} < \infty.$$

pour tous $0 < \varepsilon < T$.

Maintenant, observons que pour $0 < \varepsilon \le y$

$$|e^{-y\varepsilon}(\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon)| \le 1 + y\varepsilon e^{-y\varepsilon} \le 1 + e^{-1},$$

de même, pour $T \ge 1$

$$|e^{-yT}(\cos T + y\sin T)| \le e^{-yT}(1+y) \le e^{-y}(1+y).$$

Ainsi pour $0 < \varepsilon \le y \le T$ et $T \le 1$

$$|g_{\varepsilon,T}(y)| \le \frac{\max\{(1+e^{-1}, e^{-y}(1+y)\}}{y^2+1} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Il est donc légitime d'invoquer le théorème de la convergence dominée pour écrire

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\lim_{T\to+\infty}\int_0^\infty g_{\varepsilon,T}(y)dy = \int_0^\infty \frac{dy}{y^2+1} = \frac{\pi}{2},$$

d'autre part, comme
$$\int_\varepsilon^T \frac{\sin(x)}{x}dx = \int_0^\infty g_{\varepsilon,T}(y)dy$$
nous avons finalement
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\lim_{T\to+\infty}\int_0^\infty g_{\varepsilon,T}(y)dy = \frac{\pi}{2}.$$

❏

Exercice 6 : (avec des intégrales doubles - 2)
En intégrant sur $[0,u]\times[0,u]$, $f(x,y)=\sin(x)e^{-xy}$, montrer que
$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x}(1-e^{-xu})dx = \int_0^u \frac{1-e^{-yu}\big(\cos(u)+y\sin(y)\big)}{1+y^2}dy,$$
et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}.$

Exercice 7 : (avec Riemann-Lebesgue[a])
1) Montrer que
$$\forall\, n\in\mathbb{N}\ :\ \int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}dt = \frac{\pi}{2}.$$
2) Montrer que
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}dt - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}dt\right) = 0.$$
3) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}.$

[a] Le Lemme de Reimann-Lebesgue : si $f\in\mathscr{C}^0([a,b])$ alors $\lim_n\int_a^b f(t)\cos(nt)dt = \lim_n\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0$; la preuve est élémentaire si $f\in\mathscr{C}^1([a,b])$ avec une intégration par parties et un peu plus délicate si f est seulement continue.

Solution : 1) On a pour $x\in]0,2\pi[$
$$\frac{1}{2}+\cos(x)+\cos(2x)+\dots+\cos(nx) = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{2\sin(x/2)},$$
par conséquent pour $x\in]0,\pi[$
$$1+2\cos(2x)+2\cos(4x)+\dots+2\cos(2nx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)},$$

qui donne immédiatement

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)} dt = \frac{\pi}{2}.$$

2) Nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)} dt \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)-t}{t\sin(t)} \sin((2n+1)t) dt = 0,$$

la dernière limite est nulle via Riemann-Lebesgue par continuité de l'application $t \mapsto \frac{\sin(t)-t}{t\sin(t)}$ sur $[0, \pi/2]$.

3) La convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ implique

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t} dt,$$

en particulier

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt,$$

on invoque alors les deux premières questions pour conclure. ❏

Exercice 8 : Calculer par récurrence $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{\tan(t)} dt$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

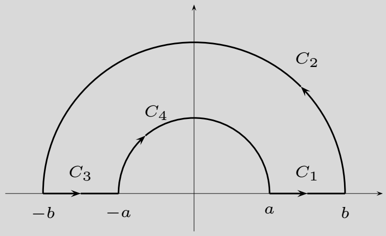
Solution : C'est la même idée que l'exercice précédent. ❏

Exercice 9 : On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$. Montrer que $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$, calculer f' pour en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Exercice 10 : (avec Green-Riemann)
1) Soient $0 < a < b$. Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\left\{(x\sin(x) - y\cos(x))dx + (x\cos(x) + y\sin(x))dy\right\}$$

le long du contour orienté :



2) En déduire que

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

Solution : 1) La forme ω est fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donc dans l'ouvert étoilé $\{\, re^{i\theta},\quad r > 0,\ -\pi/4 < \theta < 5\pi/4\,\}$, soit avec Poincaré $\displaystyle\int_C \omega = 0$.

2) Nous allons successivement faire tendre a vers 0_+ et b vers $+\infty$.
⇝ En respectant les notations de la figure

$$\lim_{a\to 0_+}\lim_{b\to+\infty}\int_{C_1}\omega = \lim_{a\to 0_+}\lim_{b\to+\infty}\int_{C_3}\omega = \lim_{a\to 0_+}\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{\sin(x)}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx,$$

⇝ Pour C_2, la paramétrisation $x = b\cos(\theta),\ y = b\sin(\theta)$ où θ varie de 0 à π donne

$$\int_{C_2}\omega = \int_0^\pi e^{-b\sin(\theta)}\cos(b\cos\theta)d\theta$$

qui tends vers 0 par convergence dominée puisque $|e^{-b\sin(\theta)}\cos(b\cos\theta)| \leq e^{-b\sin(\theta)} \leq 1 \in L^1([0,\pi])$.

⇝ De même, pour C_4, la paramétrisation $x = a\cos(\theta),\ y = a\sin(\theta)$ où θ varie de π à 0 donne

$$\int_{C_4}\omega = -\int_0^\pi e^{-a\sin(\theta)}\cos(a\cos\theta)d\theta$$

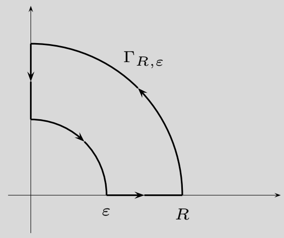
qui tends vers $-\pi$ par convergence dominée puisque $|e^{-a\sin(\theta)}\cos(a\cos\theta)| \leq 1 \in L^1([0,\pi])$.

⇝ En résumé

$$0 = \lim_{a\to 0_+}\lim_{b\to+\infty}\int_C \omega = 2\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx - \pi$$

CQFD. ❑

Exercice 11 : (avec la formule de Cauchy) Pour $R>0,\ \varepsilon>0$ on note $\Gamma_{R,\varepsilon}$ le circuit ci-dessous



1) Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\frac{e^{iz}}{z}dz$.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0_+}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}-1}{z}dz=\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$.

3) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}$.

Solution : C'est la version holomorphe de l'exercice précédent. ❏

3. Autour de l'intégrale de Dirichlet

Exercice 12 : Soit $f\in\mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ tendant vers 1 en $+\infty$ et

$$\varphi(x):=\int_0^{+\infty}f(t)\left(\frac{\sin(xt)}{t}\right)^2dt.$$

1) Quel est de domaine de définition de φ ? Exprimez la limite L en 0_+ de $\varphi(x)/x$ en fonction d'une intégrale.
2) Prouver que l'on a

$$L=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt.$$

Exercice 13 : (E3343) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{2n\pi}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\pi-\frac{\pi}{2}\log(2\pi),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{2n\pi}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\log(\pi).$$

Exercice 14 : (Évaluation du reste) Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\left| \int_x^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \frac{2}{x}.$$

Exercice 15 : (E4286) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2(x) - \cos(x)}{x} dx = \frac{\gamma}{2}$$

où γ est la constante d'Euler.

Exercice 16 :

Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.7 mars 2008 *lassere@picard.ups−tlse.fr*