L1 - PCP - FEUILLE 3 : SYSTÈMES LINÉAIRES.

Exercice 1. *Résoudre les système linéaires suivants :*

$$\begin{cases} 2x+y-z &= 0\\ x+2y+z &= 0\\ 3x+y-2z &= 0 \end{cases},\ \begin{cases} 2x+y-z &= 1\\ x+2y+z &= -1\\ 3x+y-2z &= 2 \end{cases},\ \begin{cases} 2x+y-z &= 1\\ x+2y+z &= 0\\ 3x+y-2z &= 2 \end{cases}.$$

<u>Solutions :</u> 1) : $\{(\lambda,\lambda,\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$, *2) :* $\{(\lambda+1,-1-\lambda,\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$, *3) : pas de solutions.*

Exercice 2. *On se propose de calculer lorsque cela est possible l'inverse de la matrice*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a\\ a & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a\\ a & \dots & a & 1 \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R}),\quad a\in\mathbb{R}.$$

a) Montrer que A *est inversible si, et seulement si pour tout* $Y=(y_i)_1^n\in\mathbb{R}^n$*, l'équation linéaire* $AX=Y$ *d'inconnue* $X=(x_i)_1^n\in\mathbb{R}^n$ *admet une unique solution. Écrire cette équation linéaire.*

b) On pose $s=\sum_1^n x_i,\ S=\sum_1^n y_i$ *Montrer que si* $1+(n-1)a\neq 0$ *on a* $s=\frac{S}{1+(n-1)a}$*. En déduire que sous ces hypothèses* $AX=Y$ *équivaut à* $(1-a)x_i=y_i-\frac{Sa}{1+(n-1)a},\ 1\leq i\leq n$*. On suppose de plus que* $a\neq 1$*, montrer que*

$$x_i=\frac{(1+(n-1)a)y_i-aS}{(1-a)(1+(n-1)a)},\ 1\leq i\leq n$$

et conclure.

Exercice 3. *Résoudre les systèmes linéaires suivants en discutant s'il y a lieu des valeurs des paramètres réels.*

$$\begin{cases} x+2y &= 5\\ x+3y &= 5\\ x+7y &= \beta \end{cases},\ \begin{cases} x+y-az &= 0\\ x+ay-z &= 0\\ x+(a+1)y+2z &= 0 \end{cases},\ \begin{cases} ax+y+z &= 1\\ x+ay+z &= a\\ x+y+az &= a^2 \end{cases}.$$

<u>Solutions :</u> 1) Si $\beta\neq 5$ *le système n'a pas de solutions, si* $\beta=5$ *la seule solution est* $(5,0)$*.*
2) : Si $a=1$ *le système admet comme solutions* $\{(4\lambda,-3\lambda,\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$*, si* $a=-1$ *le système admet comme solutions* $\{(-2\lambda,\lambda,\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$*, sinon, la seule solution est* $(0,0,0)$*.*
3) Si $a=1$ *le système admet comme solutions* $\{(1-\lambda-\mu,\lambda,\mu),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$*, si* $a=-2$ *le système n'a pas de solution et si* $a\neq 1$ *et* $a\neq 2$ *il admet l'unique solution* $(-\frac{a+1}{a+2},\frac{1}{a+2},\frac{(a+1)^2}{a+2})$*.*

Exercice 4. *Montrer que les vecteurs* $v_1 = (1, -2, 0, 3)$, $v_2 = (2, 3, 0, 1)$, $v_3 = (2, -1, 2, 1)$ *forment une famille libre ; montrer que le vecteur* $v = (3, 9, -4, -2)$ *appartient au sous espace* E *engendré par les trois vecteurs* v_1, v_2, v_3 *et déterminer les composantes de* v *dans cette base de* E.
Solution : $v = v_1 - 3v_2 - 2v_3$.

Exercice 5. *Soient* F *et* G *les sous-espaces de* $\mathbb{R}^4$ *engendrés respectivement par* $\{v_1, v_2\}$ *et* $\{w_1, w_2\}$ *où*

$$v_1 = (1, -1, 0, 2),\ v_2 = (2, 1, 3, 1),\ w_1 = (1, 1, 1, 1),\ w_2 = (3, -4, 4, 2).$$

Déterminer une base de $F \cap G$.
Solution : $F \cap G = \mathrm{vect}\{(8, 1, 9, 7)\}$.