L1-SDI- Feuille 3
Déterminants

Exercice 1 Calculer les déterminants des matrices suivantes, lorsque c'est possible.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}$$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z,\ x + y,\ z).$$

Calculer le déterminant de f.

Exercice 4 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2. En déduire que $\det(A) = \pm 27$.

Exercice 5 Montrer que le déterminant suivant est nul (pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 6 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse, sinon donner leur rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ C_h = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix},\ h \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7 Calculer le déterminant ci-dessous (pour $a, b, c \in \mathbb{R}$) :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 8 On pose $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, et plus généralement, pour tout $n \geq 2$,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

a) Calculer Δ_2 et Δ_3.
b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.
c) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_n = n + 1$.

Exercice 9 Montrer que l'équation suivante n'admet pas de solution ($A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) :

$$A^2 = -I_3.$$