
SESSION DE 2004

CA/PLP

CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES – SCIENCES PHYSIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

*L'usage des calculatrices de poche est autorisé
(conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999).*

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

Le premier exercice porte sur des calculs d'aires de domaines délimités par une parabole et différentes droites.

Le deuxième exercice, de probabilités, met en œuvre le calcul matriciel et permet d'étudier l'évolution, à long terme, de l'utilisation de trois marques d'un produit.

Le problème porte sur l'étude d'une fonction dont il faut montrer qu'elle est l'unique solution d'une équation différentielle donnée.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

PREMIER EXERCICE

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On désigne par A et B les points de la parabole \mathcal{P} d'abscisses respectives a et b .

1. Déterminer une équation de la droite (AB) .
2. a) Exprimer en fonction de a et b l'aire A_I du domaine limité par la parabole \mathcal{P} , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.
b) Exprimer en fonction de a et b l'aire S du domaine limité par la droite (AB) et la parabole \mathcal{P} .
3. Les tangentes à \mathcal{P} en A et B sont respectivement notées Δ_A et Δ_B . Elles se coupent en C . Déterminer les coordonnées du point C .
4. Calculer l'aire A du triangle ABC (on rappelle que dans une base orthonormée directe $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$).
5. Quelle est la valeur du rapport $\frac{A}{S}$?

DEUXIÈME EXERCICE

L'objet de cet exercice est l'étude de l'évolution, au cours du temps, de l'utilisation de trois marques de dentifrice pour une population donnée de consommateurs.

L'ensemble des couples de réels est noté \mathbb{R}^2 .

Trois marques X , Y et Z d'un dentifrice occupent un secteur de consommation. Chaque mois, les consommateurs de la population étudiée utilisent une et une seule de ces marques.

Soit n un entier naturel. Pour un consommateur pris au hasard, on désigne par X_n (respectivement Y_n et Z_n) l'événement : « La marque X (respectivement Y et Z) est utilisée au cours du n -ième mois ».

Les probabilités des évènements X_n , Y_n et Z_n sont respectivement notées x_n , y_n et z_n .

Au cours du mois d'essai ($n = 0$), on a observé les valeurs initiales : $x_0 = 0,1$, $y_0 = 0,2$ et $z_0 = 0,7$.

D'autre part, on a pu déterminer par sondage les intentions des consommateurs que l'on supposera constantes :

- la probabilité, pour un consommateur ayant utilisé la marque X au cours du mois n , d'adopter la marque X (respectivement Y et Z) au cours du mois suivant est $0,4$ (respectivement $0,3$ et $0,3$) ;

- la probabilité, pour un consommateur ayant utilisé la marque **Y** au cours du mois n , d'adopter la marque **X** (respectivement **Y** et **Z**) au cours du mois suivant est 0,3 (respectivement 0,4 et 0,3) ;
- la probabilité, pour un consommateur ayant utilisé la marque **Z** au cours du mois n , d'adopter la marque **X** (respectivement **Y** et **Z**) au cours du mois suivant est 0,2 (respectivement 0,1 et 0,7).

1. Pour tout entier naturel n :

a) exprimer x_{n+1} , y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n , y_n et z_n .

b) vérifier que $x_n + y_n + z_n = 1$.

2. On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} = A U_n + B$.

3. On désigne par I la matrice unité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice $I - A$ est inversible.

b) Déterminer une matrice C telle que $C = A C + B$.

4. Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = U_n - C$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n , $V_n = A^n V_0$.

5. a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice A , ainsi que les sous-espaces propres associés respectivement à chacune des valeurs propres.

b) Préciser pourquoi A est diagonalisable et déterminer une base \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 , constituée de vecteurs propres de A .

c) Déterminer la matrice P de passage de la base canonique de \mathbb{R}^2 à la base \mathcal{C} , ainsi que son inverse P^{-1} .

d) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de la matrice A^n .

Exprimer x_n , y_n et z_n en fonction de n .

6. Que conclure de l'utilisation, à long terme, des marques **X**, **Y**, **Z** ?

PROBLÈME

Notations et rappels

L'ensemble des nombres réels est noté \mathbb{R} .

La fonction tangente réalise une bijection continue de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} . La bijection réciproque de cette fonction est notée \arctan .

La fonction \arctan est dérivable sur \mathbb{R} . Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Pour tout entier naturel n , le développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction \arctan est:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

PARTIE A

Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} \text{ pour } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Étudier la limite de f en $+\infty$.
3. a) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
b) Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.
4. a) Pour tout réel x positif, on pose $N(x) = x - (1 + x^2) \arctan(x)$.
Étudier les variations de la fonction N et préciser son signe sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .
5. Tracer la représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

PARTIE B

On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ pour } x \neq 0 \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction F est continue sur \mathbb{R} et qu'elle est paire.

2. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) \leq F(x) \leq 1$. (On pourra utiliser la question 4-b) de la partie A).
3. a) Établir que F est dérivable en 0 et préciser la valeur de $F'(0)$.
 b) Justifier que F est dérivable sur \mathbb{R}^* et montrer que, pour tout réel x non nul,

$$F'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - F(x)).$$

 c) En déduire le sens de variation de la fonction F sur \mathbb{R} .
 d) Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$. En déduire la limite de la fonction F en $+\infty$.
4. Tracer la représentation graphique de la fonction F dans le plan rapporté au même repère que celui utilisé pour tracer la représentation graphique de la fonction f .

PARTIE C

Dans cette partie, on s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $x^2 y' + xy = \arctan(x)$.

On note (E₀) l'équation différentielle associée : $x^2 y' + xy = 0$.

1. a) On appelle g la fonction définie sur \mathbb{R}^* par

$$\begin{cases} g(x) = \frac{4}{x} & \text{si } x > 0 \\ g(x) = \frac{-1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction g est-elle solution de (E₀) sur \mathbb{R}^* ?

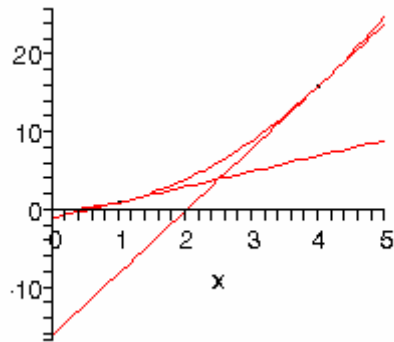
- b) Résoudre l'équation différentielle (E₀) sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
2. À toute fonction y de classe C^1 sur \mathbb{R}^* , on associe la fonction u définie pour $x \neq 0$ par $u(x) = xy(x)$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur la fonction u pour que la fonction y soit solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire, sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Montrer que la fonction F définie dans la partie B est l'unique solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E).

Éléments de correction de l'épreuve de mathématiques

PREMIER EXERCICE



1. Puisque A et B sont deux points de la parabole \mathcal{P} , leur coordonnées sont $A(a, a^2)$ $B(b, b^2)$.

M appartient à (AB) si et seulement si : $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$; ce qui revient ici à : $\begin{vmatrix} x-a & b-a \\ y-a^2 & b^2-a^2 \end{vmatrix} = 0$.

Après simplification on obtient l'équation de (AB) : $y = (x-a)(b+a) + a^2$.

2.a) \mathcal{P} étant située au-dessus de l'axe $(x'x)$, $A_1 = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

b) Le domaine délimité par la droite (AB) et la parabole \mathcal{P} est l'intérieur du trapèze défini par A, B , et leurs projections sur l'axe $(x'x)$, privé du domaine décrit au 2.a). Donc son aire est égale à :

$$\frac{(a^2 + b^2)(b-a)}{2} - \frac{(b^3 - a^3)}{3} \text{ qui après simplifications donne: } S = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

2. L'équation générale de la tangente en un point A est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Ici $f(x) = x^2$ d'où l'équation de Δ_A : $y = 2a(x-a) + a^2$ qui revient à : $y = 2ax - a^2$; de même on obtient l'équation de Δ_B : $y = 2bx - b^2$. La résolution du système conduit aux coordonnées de

l'intersection C de Δ_A et Δ_B : $C(\frac{a+b}{2}, ab)$.

3. La formule rappelée dans l'énoncé, si nous la prenons en valeur absolue, nous permet de calculer l'aire d'un parallélogramme défini par deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} ; en prenant ici les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , et en divisant par deux (puisque c'est l'aire du triangle ABC que nous cherchons)

$$\text{nous obtenons : } A = \frac{(b-a)^3}{4}.$$

4. Compte tenu des résultats des 2.b et 4. Il vient : $\frac{A}{S} = \frac{3}{2}$.

DEUXIEME EXERCICE

Nous utiliserons la notation $P(A/B)$ pour désigner la probabilité de A sachant B .

1.a) L'énoncé nous indique que : $x_0 = 0,1$ $y_0 = 0,1$ $z_0 = 0,1$

$$\text{et } \begin{cases} P(X_{n+1}/X_n) = 0,4 & P(Y_{n+1}/X_n) = 0,3 & P(Z_{n+1}/X_n) = 0,3 \\ P(X_{n+1}/Y_n) = 0,3 & P(Y_{n+1}/Y_n) = 0,4 & P(Z_{n+1}/Y_n) = 0,3 \\ P(X_{n+1}/Z_n) = 0,2 & P(Y_{n+1}/Z_n) = 0,1 & P(Z_{n+1}/Z_n) = 0,7 \end{cases}.$$

La formule des probabilités totales, utilisée ici avec la partition $\{X_n, Y_n, Z_n\}$ constituée d'événements de probabilité non nulles, nous donne :

$x_{n+1} = P(X_{n+1}) = P(X_{n+1} / X_n) \times P(X_n) + P(X_{n+1} / Y_n) \times P(Y_n) + P(X_{n+1} / Z_n) \times P(Z_n)$; idem pour y_{n+1} et z_{n+1} . Ce que nous pouvons résumer matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,7 \end{pmatrix}. \text{ En tenant compte du fait que } \{X_n, Y_n, Z_n\} \text{ est}$$

une partition de l'ensemble des possibilités nous avons bien $x_n + y_n + z_n = 1$.

2. Reprenons les résultats du 1. en utilisant que ; il vient $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2x_n + 0,1y_n + 0,2 \\ 0,2x_n + 0,3y_n + 0,1 \end{pmatrix}$;

Les matrices introduites dans l'énoncé nous permettent d'écrire: $U_{n+1} = AU_n + B$.

3.a) $\det(I - A) = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & 0,7 \end{vmatrix} = 0,54$; donc la matrice $I - A$ est inversible.

b) $C = AC + B \Leftrightarrow (I - A)C = B \Leftrightarrow C = (I - A)^{-1}B$ (cette dernière équivalence est justifiée par le fait que $(I - A)$ est inversible). Calculons $(I - A)^{-1}$ à l'aide de la formule :

$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \times \text{transposée de la matrice des cofacteurs de } M$; il vient :

$$C = \frac{1}{0,54} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice $\begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$ convient comme matrice C .

4. Pour tout n dans : $V_{n+1} = U_{n+1} - C = (AU_n + B) - (AC + B) = A(U_n - C) = AV_n$;

d'où : $V_n = A^n V_0$ (on peut si on le veut détailler ce passage en utilisant une démonstration par récurrence).

5.a) Calculons les valeurs propres de A : $\det \begin{pmatrix} 0,2 - \lambda & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 0,5\lambda + 0,04$; les

racines de ce trinôme, donc les valeurs propres sont : $0,1$ et $0,4$.

Pour trouver le sous-espace propre associé à $0,1$ nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} (0,2 - 0,1)x + 0,1y = 0 \\ 0,2x + (0,3 - 0,1)y = 0 \end{cases} ; \text{ donc le sous-espace propre associé à la valeur propre } 0,1 \text{ est la droite}$$

vectorielle engendrée par le vecteur $V_1(1, -1)$.

En procédant de même on obtient que **le sous-espace propre associé à la valeur propre $0,4$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $V_2(1, 2)$.**

b) Rappel d'un théorème: une matrice est diagonalisable si et seulement si chaque sous-espace propre est de dimension égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propres correspondante, en tant que racine du polynôme caractéristique. Ici c'est bien le cas . Donc A est diagonalisable.

Remarque : nous aurions pu utiliser ici un théorème moins général disant que si une matrice a ses valeurs propres toutes distinctes alors elle est diagonalisable.

c) Les deux vecteurs $V_1(1, -1)$ et $V_2(1, 2)$ forment une base \mathbb{C} de vecteurs propres ; la matrice de passage P cherchée est alors $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Afin de calculer son inverse utilisons la même formule

qu'au 3.b ; nous obtenons : $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d)

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0,1^n & 0 \\ 0 & 0,4^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 0,1^n + 0,4^n & -0,1^n + 0,4^n \\ -2 \times 0,1^n + 2 \times 0,4^n & -0,1^n + 2 \times 0,4^n \end{pmatrix}$$

En tenant compte de $U_n = V_n + C = A^n V_0 + C = A^n (U_0 - C) + C$, nous en déduisons que :

$$x_n = \frac{1}{54} (-6 \times 0,1^n - 3,6 \times 0,4^n) + \frac{5}{18} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{54} (6 \times 0,1^n - 7,2 \times 0,4^n) + \frac{2}{9} \quad \text{et} \quad z_n = 1 - x_n - y_n$$

6. Puisque 0,1 et 0,4 sont en valeur absolue strictement inférieure à 1 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{5}{18}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{2}{9}, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{2}.$$

Remarquons que les coefficients de A^n ont pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini ; en reprenant l'expression de U_n du 5.d), on retrouve bien ces résultats.

Conclusion : les proportions des utilisateurs des trois marques tendent à se stabiliser.

PROBLEME

PARTIE A

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

1. La fonction f est paire, car \arctan en tant que fonction réciproque d'une fonction impaire est une fonction impaire.

2. $\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$; d'où $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

3.a) Rappelons que pour qu'une fonction soit dérivable en un point, il faut et il suffit qu'elle admette un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de ce point. Ici :

si $x \neq 0$ $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) = 1 + o(x)$; égalité qui se prolonge en 0. D'où f est

bien dérivable en 0, et son nombre dérivé est 0 (coefficient de x dans le développement limité).

Plus directement : si $x \neq 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\arctan(x) - x}{x^2} = \frac{x^3 + o(x^3)}{x^2} = x + o(x)$ dont la limite en 0 est 0. **D'où $f'(0)$ existe et vaut 0.**

Nous retrouvons d'ailleurs un résultat plus général : une fonction paire dérivable en 0 a sa dérivée en 0 qui est nulle.

b) Pour $x \neq 0$ f est quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas ; donc f est dérivable et : $f'(x) = \frac{x - \arctan(x) \times (1 + x^2)}{x^2(1 + x^2)}$.

4.a) $N'(x) = 1 - 1 - 2x \arctan(x) \leq 0$ sur $[0, +\infty[$; d'où le tableau de variation de N :

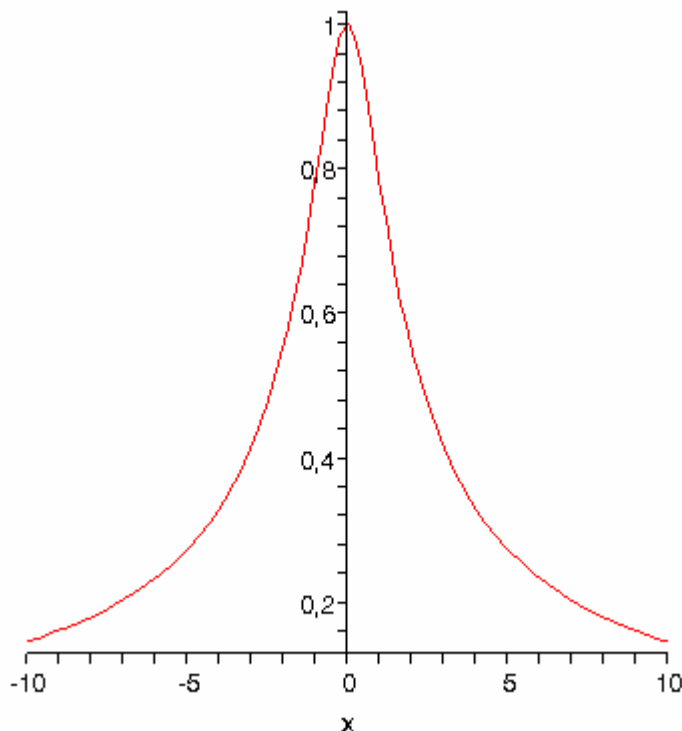
x	0	$+\infty$
$N'(x)$	-	
$N(x)$	0	→

donc $N(x)$ est négatif sur $[0, +\infty[$.

b) Puisque $f'(x) = \frac{N(x)}{x^2(1+x^2)}$, $f'(x)$ reste négatif sur $[0, +\infty[$. Et f décroît de $f(0) = 1$ à 0 (car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Pi}{2x} = 0).$$

c) Représentation graphique de f :



PARTIE B

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

1. F est continue sur \mathbb{R}^* comme quotient de deux fonctions continues (le numérateur est continu comme intégrale entre 0 et x d'une fonction continue). Reste à étudier la continuité en 0 :

Nous obtenons le développement limité de $\int_0^x f(t) dt$ en « intégrant » le développement limité de $f(x)$ obtenu au 3. (en n'oubliant pas de rajouter la valeur de cette intégrale en 0 ; qui vaut 0 ici ! !).

$$\int_0^x f(t) dt = 0 + x - \frac{x^3}{9} + o(x^3) ; \text{ d'où : } F(x) = 1 - \frac{x^2}{9} + o(x^2) \text{ (cette égalité a été démontrée sur}$$

\mathbb{R}^* , et est vraie aussi en 0); donc **F est continue en 0**.

Pour montrer que F est paire montrons que $x \rightarrow \int_0^x f(t) dt$ est une fonction impaire :

aidons nous du changement de variable $t \rightarrow -t$: $\int_0^x f(t)dt = \int_0^{-x} f(-u)(-1)du = -\int_0^{-x} f(u)du$ qui est bien l'égalité qu'il nous fallait. Donc **F est une fonction paire**.

3.a) Soit x positif: puisque f est décroissante sur $[0, x]$ $f(x) \leq f(t) \leq 1$; d'où

$$xf(x) \leq \int_0^x f(t)dt \leq x \quad \text{et} \quad f(x) \leq F(x) \leq 1. \quad f \text{ et } F \text{ étant paires cette égalité s'étend à } \mathbb{R}.$$

Le développement limité de F en 0 à l'ordre 2, (il aurait suffi de l'ordre 1) obtenu au 1. nous assure que **F est dérivable en 0 et que sa dérivée en 0 est nulle** (voir le coefficient de x).

b) Sur \mathbb{R}^* : f étant continue, $x \rightarrow \int_0^x f(t)dt$ est dérivable ; et F est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus $F'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x} f(x)$; donc $F'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - F(x))$.

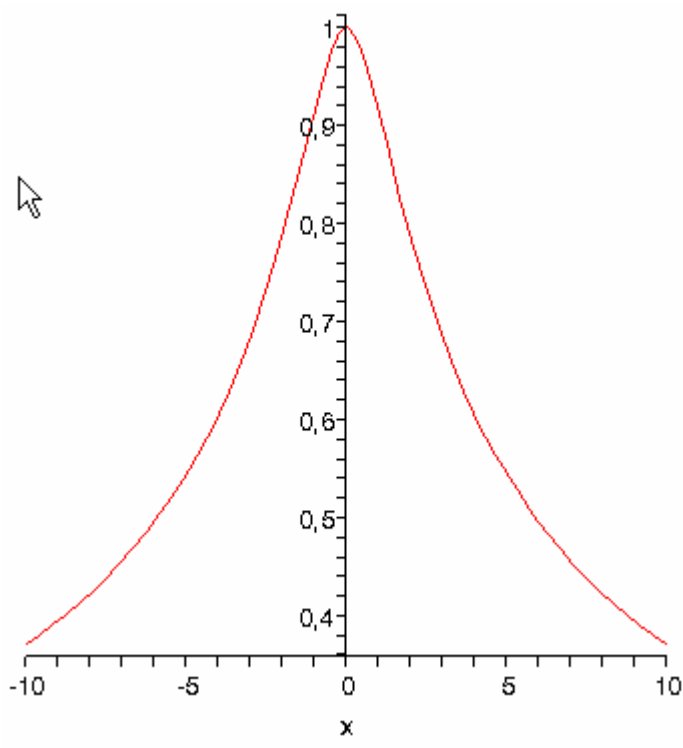
c) Nous avons vu au 3.a) que sur \mathbb{R} $f(x) - F(x) \leq 0$; donc **F est croissante sur \mathbb{R}^- , et décroissante sur \mathbb{R}^+** .

d) soit $x \geq 1$: $0 \leq \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^x \frac{\rho}{2t} dt$ d'après l'étude de f ; D'où : $0 \leq \int_1^x f(t)dt \leq \frac{\rho}{2} \ln(x)$. Il en

résulte que : $0 \leq \int_1^x f(t)dt \leq \frac{\rho}{2} \frac{\ln(x)}{x}$. Et puisque $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, le théorème des gendarmes nous

assure que $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t)dt = 0$.

4.Représentation graphique de F :



PARTIE C

1.a) Si $x > 0$: $g'(x) = -\frac{4}{x^2}$; d'où : $x^2 g'(x) + xg(x) = -4 + 4 = 0$. Nous obtenons le même résultat si $x < 0$. Donc **g est solution de (E_0) sur \mathbb{R}^*** .

b) Sur \mathbb{R}^{+*} : nous savons que la résolution suivante, que nous employons comme moyen mnémotechnique, est entachée d'erreurs logiques, mais le cours nous assure que le résultat trouvé est correct : $x^2 y' + xy = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = -\ln(x) + l \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$; donc **la solution générale**

sur \mathbb{R}^{+*} est : $x \rightarrow \frac{k}{x}$ ou k est un réel quelconque.

Sur \mathbb{R}^{-*} le calcul et le résultat sont identiques.

2. Sur \mathbb{R}^* : $y(x) = \frac{u(x)}{x}$; donc

$$x^2 y' + xy = \arctan(x) \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{xu'(x) - u(x)}{x^2} \right) + x \frac{u(x)}{x} = \arctan(x) \Leftrightarrow u'(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

$\Leftrightarrow u'(x) = f(x)$; **pour que y soit solution de (E) sur \mathbb{R}^* il faut et il suffit que u soit une primitive de f.**

3. Sur \mathbb{R}^{+*} : les solutions sont données par $u(x) = \int_0^x f(t)dt + a$ ou a est un réel quelconque ;

donc **les solutions de (E) sur \mathbb{R}^{+*} sont données par $y(x) = F(x) + \frac{a}{x}$.**

De même sur \mathbb{R}^{-*} .

4. Les solutions sur \mathbb{R}^* sont encore de la même forme, mais les constantes arbitraires a et b ne sont pas nécessairement les mêmes sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} .

Pour qu'une fonction y soit solution sur \mathbb{R} , elle doit en plus être continue en 0 ; ce qui l'oblige à avoir une limite en 0 à droite et à gauche. Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$, a et b doivent être nuls. Donc F est la seule solution possible. Vérifions qu'elle l'est :

Nous savons qu'elle l'est sur \mathbb{R}^* (cf 3.) ; de plus F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$ et $F(0) = 1$, donc : $0^2 F'(0) + 0F(0) = \arctan(0)$. Et **F est bien solution de (E) sur \mathbb{R} ; et c'est la seule !**