Agrégation interne de Mathématiques – Exo-sup, Septembre 2011

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f est injective sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, montrer quelle l'est alors aussi sur $\mathbb{R}$.

Solution : Si f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, il existe deux rationnels $r < s$ tels que $f(r) = f(s)$. f continue atteint ses bornes sup et inf sur $[r, s]$ et comme elle ne peut être constante sur $[r, s]$, on peut supposer (quitte à remplacer f par $-f$) que $\sup_{x\in[r,s]} f(x) = f(t)$ avec $r < t < s$. On a donc $[f(r), f(t)] = [f(t), f(s)]$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $r < x < t$ vérifiant $f(r) \leq f(x) \leq f(t)$ (cette dernière condition est essentielle car f peut toujours prendre des valeurs strictement inférieures à $f(r) = f(s)$), il existera (au moins) un réel $t < u(x) < s$ vérifiant $f(x) = f(u(x))$.

On vient donc de définir une application $u\ :\ ]r, t[\cap f^{-1}([f(r), f(t)]) \ni x \mapsto u(x) \in]t, s[$. Sa restriction

$$u\ :\ ]r, t[\cap f^{-1}([f(r), f(t)]) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \ni x \mapsto u(x) \in]t, s[$$

aux x irrationnels est injective et à valeur dans $\mathbb{Q}$. En effet, s'il existe $x \neq x'$ dans $]r, t[\cap f^{-1}([f(r), f(t)]) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ tels que $u(x) = u(x')$, alors $f(x) = f(u(x)) = f(u(x')) = f(x')$ ce qui est absurde vu que f est injective sur les irrationnels. Pour les mêmes raisons $f(x) = f(u(x))$ entraine que $u(x) \in \mathbb{Q}$ dès que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Enfin, $]r, t[\cap f^{-1}([f(r), f(t)]) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ n'est pas dénombrable car son image par f est l'intervalle $]f(r), f(t)[$. Nous venons donc de construire une application injective u de l'ensemble non dénombrable $]r, t[\cap f^{-1}([f(r), f(t)]) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ dans $\mathbb{Q}$ ce qui est absurde. CQFD. ■

ℹ • Le résultat ne subsiste pas si on remplace $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, considérer par exemple f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ pour $x \leq 0$ et $|x|\sqrt{2}$ pour $x > 0$.
• La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{si } x = \frac{p}{q},\ p \wedge q = 1, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

est « notoirement » 1-périodique, continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, discontinue sur $\mathbb{Q}$ et nulle part dérivable (voir un autre exercice). Par suite la fonction $g(x) := x + f(x)$ sera injective et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, discontinue et non injective sur $\mathbb{Q}$ ($f(1) = f(0)$...).

Existe t'il une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ envoyant les rationnels dans les irrationnels et réciproquement ? Même question sans l'hypothèse de continuité.

Solution : f prends des valeurs rationnelles et irrationnelles, étant continue $f(\mathbb{R})$ n'est pas dénombrable (c'est le théorème des valeurs intermédiaires). Toutefois $f(\mathbb{Q})$ est dénombrable car $\mathbb{Q}$ l'est, et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est aussi dénombrable puisque inclus dans $\mathbb{Q}$. Par conséquent $f(\mathbb{R})$ doit être dénombrable. Contradiction, une telle fonction ne peut exister. CQFD. ■

Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.

Solution : On suppose f croissante. A chaque point de discontinuité a on associe un rationnel $\varphi(a)$ choisit dans l'intervalle $]f(a_+), f(a_-)[$. f étant croissante, ces intervalles sont disjoints et par conséquent l'application φ est une application **injective** de l'ensemble des points de discontinuité de f dans $\mathbb{Q}$: l'ensemble des points de discontinuité est donc au plus dénombrable. ■