UNIVERSITÉ PAUL SABATIER **2006/2007**

L1 SDI - Feuille 4
Limites - Continuité - Dérivabilité

Exercice 1. Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ 2) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$ 3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-1}{3x^2-3x+2}$

4) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ 5) $\lim_{x\to \Pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ 6) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

7) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ 8) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$ 9) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln x}$

10) $\lim_{x\to 1} \frac{2^x-2}{x-1}$

Exercice 2.
1) Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
2) Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis étudier sur quels ensembles elles sont prolongeables par continuité.

1) $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}$ 2) $f(x) = \sin(x)\sin(\dfrac{1}{x})$

3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

Exercice 4. Déterminer les domaines de définition et la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}\ ; \quad g(x) = \sqrt{x^2-2x-5}\ ; \quad h(x) = \ln(4x+3)\,.$$

Exercice 5. Montrer que l'équation $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1,1[$. Montrer que tout polynôme P de degré impair admet une racine réelle (i.e. il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 0$).

Exercice 6. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [-1,1]$, on ait $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) \geq m$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 8. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que pour tout réels x et y, on ait $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 9. Soit $f : [a,b] \to I\!R$ une fonction continue. On veut démontrer que

$$\sup_{a<x<b} f(x) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x).$$

1. Montrer que

$$\sup_{a<x<b} f(x) \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Pour cela, on pourra montrer que $\sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ est un majorant de f sur $]a,b[$.

2. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$. Montrer que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$ en distinguant les trois cas : $x_0 = a, x_0 = b, x_0 \in]a,b[$. *Indication :* Dans le cas $x_0 = a$, par exemple, on pourra considérer la suite de réels $a_n = a + 1/n$ et étudier la suite $(f(a_n))$.

3. Soit $g : [0,1] \to I\!R$ la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $g(x) = 1$ si $x = 1$. Montrer que

$$\sup_{0<x<1} g(x) \neq \sup_{0 \leq x \leq 1} g(x).$$

Quelle hypothèse est essentielle dans la propriété démontrée auparavant ?

L1 SDI - Feuille 4 - Corrigé
Limites - Continuité - Dérivabilité

Exercice 1.

1. La limite à droite vaut +2, la limite à gauche −2 donc il n'y a pas de limite.
2. $-\infty$
3. $\frac{2}{3}$
4. On a $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ donc la limite vaut 4
5. En posant $t = x - \pi$, on a $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t}{1-\cos t} = \lim_{t\to 0}(1+\cos t) = 2$ avec l'identité $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
6. Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguées" :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})((\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}))}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}. \end{aligned}$$

   Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
7. On utilise l'expression conjuguée :

$$(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}) \times \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}.$$

   Donc la limite demandée vaut 0.
8. $\frac{1}{n}$ en utilisant que $x^n - 1 = (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$.
9. $-\infty$ en utilisant les critères de comparaison de $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x$ ou en utilisant l'inégalité $x\ln x - x + 1 \geq 0$.
10. Le quotient est de la forme $(g(x)-1)/(x-1)$ où $g : x \mapsto 2^x$ est dérivable. Donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{2^x - 2}{x-1} = g'(1) = 2\ln 2.$$

Exercice 2.

1. On raisonne par l'absurde. Si la fonction sin admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Alors pour toute suite (u_n) tendant vers $+\infty$ on aurait $\lim_{n\to+\infty} \sin u_n = \ell$. Prenons $(u_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ et $(v_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$. On a alors $\sin(u_n) = 1$ et $sin(v_n) = -1$ et ℓ ne peut pas être égale à la fois à 1 et à −1 ce qui contredit notre hypothèse.
2. Soit $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ une fonction croissante et majorée par $M \in I\!R$. Notons

$$F = f(I\!R) = \{f(x) \mid x \in I\!R\}.$$

   F est un ensemble (non vide) de $I\!R$, notons $\ell = \sup F$. Comme $M \in I\!R$ est un majorant de F, alors $\ell < +\infty$. Soit $\epsilon > 0$, par les propriétés du sup il existe $y_0 \in F$ tel que

$\ell-\epsilon \leq y_0 \leq \ell$. Comme $y_0 \in F$, il existe $x_0 \in I\!R$ tel que $f(x_0)=y_0$. Comme f est croissante alors :

$$\forall x \geq x_0 \qquad f(x) \geq f(x_0) = y_0 \geq \ell-\epsilon.$$

De plus par la définition de ℓ :

$$\forall x \in I\!R \ \ f(x) \leq \ell.$$

Les deux propriétés précédentes s'écrivent :

$$\forall x \geq x_0 \qquad \ell-\epsilon \leq f(x) \leq \ell.$$

Ce qui exprime bien que la limite de f en $+\infty$ est ℓ.

Exercice 3.

1. La fonction est définie et continue sur $I\!R^*$. Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en 0. Or, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sin t}{t} = 0$ par le théorème des gendarmes et l'estimation $-1 \leq \sin t \leq 1$. Donc en posant $f(0)=0$ nous obtenons une fonction continue sur $I\!R$.

2. La fonction est définie sur $I\!R^*$. Et elle est continue sur $I\!R^*$. Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en $x=0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.
$$|f(x)| = |\sin x||\sin 1/x| \leq |\sin x|.$$
Donc f a une limite en 0 qui vaut 0 et en posant $f(0)=0$, nous obtenons une fonction continue sur $I\!R$.

3. f est définie et continue sur $I\!R \setminus \{-1,1\}$.
$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{(1+x)}.$$
Donc f a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $f(1)=-\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $I\!R \setminus \{-1\}$. En -1 la fonction f ne peut être prolongée continuement, car en -1, f n'admet de limite finie.

4. La fonction f est définie et continue sur $I\!R^*$. Etudions la situation en 0. f est la taux d'accroissement en 0 de la fonction $g(x) = \ln \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Donc si les objets suivants existent : la limite de f en 0 est égale à la valeur de g' en 0. Calculons g' sur $I\!R^*$:
$$g'(x) = (\ln \frac{e^x+e^{-x}}{.\ 2})' = \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$
Quand $x \to 0$ alors le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 2, donc $g'(x)$ tend vers 0. Donc g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$. En posant $f(0)=0$ nous obtenons une fonction f définie et continue sur $I\!R$.

Exercice 4.

1. Il faut que le dénominateur ne s'annule pas donc $x \neq \frac{5}{2}$. En plus il faut que le terme sous la racine soit positif ou nul, c'est-à-dire $(2+3x)\times(5-2x) \geq 0$, soit $x \in [-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}]$. L'ensemble de définition est donc $[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}[$.

2. Il faut $x^2 - 2x - 5 \geq 0$, soit $x \in]-\infty, 1-\sqrt{6}] \cup [1+\sqrt{6}, +\infty[$.

3. Il faut $4x+3>0$ soit $x > -\frac{3}{4}$, l'ensemble de définition étant $]-\frac{3}{4}, +\infty[$.

Exercice 5. Si on considère la fonction $f(x) = x^7 - 3x^2 + 4x - 1$, f est continue sur $]-1, 1[$, $f(-1) = -9 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
De même, P est continue sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, P admet au moins une racine réelle.
Exercice 6. On sait que toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $x_0 \in [-1, 1]$ tel que $f(x_0) = m := \min\{f(x), x \in [-1, 1]\}$. On a alors $m > 0$ et par définition $m \leq f(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
Exercice 7. Notons ℓ la limite de f en $+\infty$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad x > A \Rightarrow \ell - \epsilon \leq f(x) \leq \ell + \epsilon.$$

Fixons $\epsilon = +1$, nous obtenons un A correspondant tel que pour $x > A$, $f(x) \leq \ell + 1$. Nous venons de montrer que f est bornée "à l'infini". La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, donc f est bornée sur cet intervalle : il existe M tel que pour tout $x \in [0, A]$, $f(x) \leq M$. En prenant $M' = \max(M, \ell + 1)$, nous avons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq M'$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.
La fonction n'atteint pas nécessairement ses bornes : regardez $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
Exercice 8. Il est clair qu'une telle fonction doit satisfaire $f(0) = 0$ et être impaire. Déterminons d'abord f sur les entiers, puis sur les rationnels et par continuité, on étendra sur $\mathbb{R}$. On a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$. Par imparité de la fonction, cette égalité reste vraie pour les entiers relatifs. Soit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, on a $f(p/q) = pf(1/q)$. De plus, $f(1) = f(q/q) = qf(1/q)$. Donc $f(p/q) = p/qf(1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationels (x_n) telle que $x_n \to x$. Par continuité de f, $f(x_n) \to f(x)$. Or $f(x_n) = x_n f(1) \to xf(1)$. Par unicité de la limite, $f(x) = xf(1)$.
Exercice 9.

1. Pour tout $x \in]a, b[$, on a $x \in [a, b]$ donc $f(x) \leq \sup_{a\leq x\leq b} f(x)$. Par conséquent $\sup_{a\leq x\leq b} f(x)$ est un majorant de f sur l'intervalle $]a, b[$, donc il est plus grand que le plus petit des majorants : $\sup_{a<x<b} f(x) \leq \sup_{a\leq x\leq b} f(x)$.
2. f est continue sur un intervalle fermé et borné, donc elle est bornée et elle atteint ses bornes. Soit x_0 le réel où le maximum est atteint : $f(x_0) = \sup_{a\leq x\leq b} f(x)$.
   - si $x_0 = a$, considérons la suite $a_n = a + 1/n$. Pour $n \geq \frac{1}{b-a}$ on a $a_n \in [a, b]$, donc on peut considérer la suite $(f(a_n))_{n\geq\frac{1}{b-a}}$. Or a_n tend vers a quand n tend vers $+\infty$, et comme f est continue, ceci implique que $f(a_n)$ tend vers $f(a)$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, f(x_0) - \epsilon \leq f(a_n) \leq f(x_0)$, ce qui implique que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.
   - si $x_0 = b$ on obtient le résultat de manière identique en considérant la suite $b_n = b - 1/n$.
   - si $a < x_0 < b$: $f(x_0)$ est majoré par le sup de f sur $]a, b[$, donc

     $$f(x_0) \leq \sup_{a<x<b} f(x) \leq \sup_{a\leq x\leq b} f(x) = f(x_0)$$

     donc $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.
3. Avec la fonction g, on a $\sup_{0<x<1} g(x) = 0$ car $\forall x \in]0, 1[, g(x) = 0$, et $\sup_{0\leq x\leq 1} g(x) = 1$ car $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. La propriété démontrée précédemment n'est pas vraie dans notre cas, car la fonction g ne remplit pas la condition essentielle d'être continue.