CC3 – Mathématiques
L1 – SDI - PC
Lundi 14 mai 2007
Corrigé

Calculatrices et documents sont interdits. Durée de l'épreuve : 45 minutes.

Exercice 1

1. Donner le développement limité de $\text{th}(x)$ en 0 à l'ordre 3.
2. Déterminer le développement limité de $e^{\text{th}(x)}$ en 0 à l'ordre 3.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\text{th}(x)}-1-x}{x^2}$.

Solution. 1. Soit on connaît la formule par cœur, soit on retrouve la formule, au voisinage de $x=0$,

$$\text{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

Vu que $\text{th}(0)=0$ et que le développement en $u=0$ de exp à l'ordre 3 est

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + u^3\varepsilon(u),$$

on peut composer les développements limités en substituant à u la partie régulière du développement de $\text{th}(x)$ et en négligeant les puissances supérieures à 3. On calcule alors

$$u^2 = x^2 + x^3\varepsilon(x), \quad u^3 = x^3 + x^3\varepsilon(x),$$

puis on trouve

$$e^{\text{th}(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x).$$

2. Il s'ensuit que la limite demandée est $\frac{1}{2}$.

Exercice 2

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x>0$,

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

3. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ est monotone sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Solution. 1. La fonction $u \mapsto \ln(u)$ est définie et dérivable sur l'intervalle $[x, x+1]$ (vu que $x > 0$). Elle vérifie en particulier les hypothèses du théorème des accroissements finis sur cet intervalle. Il existe donc $x < c < x + 1$ tel que

$$\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c} \cdot (x + 1 - 1) = \frac{1}{c} \cdot 1 = \frac{1}{c}.$$

Comme $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$, on en déduit que la fonction vérifie l'inégalité de l'énoncé.

2. D'après la question précédente, $\frac{x}{x+1} < x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < 1$ (vu que $x > 0$). Le théorème des gendarmes s'applique alors : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = 1$. (On peut aussi procéder avec les développements limités.)

3. La fonction est dérivable sur le domaine considéré, de dérivée

$$f'(x) = \left[\ln(x+1) - \ln(x) + x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)\right] \cdot \exp(x \cdot (\ln(x+1) - \ln(x))).$$

Il suffit de montrer que $f'(x) > 0$ pour $x > 0$. La partie exponentielle est toujours strictement positive. Il suffit donc de considérer $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) + x(1/(x+1) - 1/x)$. D'après la première question,

$$g(x) > \frac{1}{x+1} + x(1/(x+1) - 1/x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 0.$$

D'où le résultat voulu.

4. Nous avons $f(x) = e^{x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$. La question 2 indique que $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} = e^1 = e$.