Université Paul Sabatier. **2007/08.**
L1-PC.

Second controle continu – lundi 7 avril 2008 (durée 1h30).
(documents et calculatrices interdits).

Question de cours : Énoncez sans démonstration le théorème des accroissements finis.

Exercice 1 :

a) Déterminer le rang de la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Est-elle inversible ?

c) Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z &= a \\ y + z &= b \\ 2x + 2y - z &= c \end{cases}$$

d'inconnues x, y, z.

d) En déduire B^{-1}.

Exercice 2 : Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 25 & 10 & 45 \\ 50 & 20 & 90 \\ 75 & 30 & 135 \end{pmatrix}$ et préciser son rang.

Exercice 3 :

a) Montrer que tout polynôme à coefficients réels $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

b) En est-il de même si P à coefficients réels est de degré pair ?

Exercice 4 :

a) Montrer que $\dfrac{e^x - 1}{x} > 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^{+\star}$.

b) Montrer que $0 < \dfrac{e^x - 1}{x} < 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^{-\star}$.

c) En déduire que $e^x \geq 1 + x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

d) En appliquant convenablement une formule de Taylor montrer que

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}^{+}.$$

e) De même, montrer que

$$1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \geq e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \ \forall x \in \mathbb{R}^{-\star}.$$

Fin de l'épreuve.

L1 PC "Petit corrigé du contrôle continu 2" 7/04/08

Question de cours : Voir le cours.

Exercice 1 : (a) $\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$

donc $\det(B) = -2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{rang}(B) = 3}$

(b) $\det(B) \neq 0$ ou $rg(B) = 3$ assurent que B est inversible.

(c) $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 3z = a \\ y + z = b \\ 2x + 2y - z = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 3z = a \\ y + z = b \\ -2y - 4z = c - a \quad (L_3 - L_1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 3z = a \\ y + z = b \\ -2z = c - a + 2b \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \end{cases}$

on tire $z = \frac{1}{2}(a - 2b - c)$ puis en reportant dans la seconde équation $y = b - z = b - \frac{1}{2}(a - 2b - c) = \frac{1}{2}(-a + 4b + c)$ et finalement $2x = a - 4y - 3z = a - 3(y+z) - y$ ie

$2x = a - 3b - \frac{1}{2}(-a + 4b + c) \Rightarrow x = \frac{3a - 10b - c}{4}$

soit $\boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a - 5b - \frac{c}{2}\right) \\ y = \frac{1}{2}(-a + 4b + c) \\ z = \frac{1}{2}(a - 2b - c) \end{cases}}$

(d) $(S) \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donc, vu (c)

on a $\boxed{B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3/2 & -5 & -1/2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

Exercice 2 : Si on remarque $C_3 = C_1 + 2C_2$ on en déduit que $rg(C) \leq 2$ et Mais $C_1 = \frac{5}{2} C_2$ et $C_3 = \frac{9}{2} C_2$: la matrice est donc de rang ≤ 1 et égale à 1 comme non nulle —

Exercice 3 : (a) Vu en TD

(b) C'est faux, considérer $P(X) = X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$

Exercice 4 : ⓐ $f(x) = e^x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, on peut donc lui appliquer le TAF sur $[0,x]$ pour tout $x>0$.

$\forall x>0$, $\exists\, 0<c<x$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^x-1}{x} = f'(c) = e^c > 1$ car $c>0$

soit $\boxed{e^x - 1 > x, \ \forall x>0}$ (1)

ⓑ Comme dans ⓐ on a pour tout $x<0$:

$\forall x>0$, $\exists\, x<c<0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^x-1}{x} = f'(c) = e^c < 1$ car $c<0$

soit $\boxed{\begin{array}{c} e^x - 1 > x \\ \forall x<0 \end{array}}$ (2) (car $x<0$)

ⓒ (1) + (2) donnent $\boxed{e^x - 1 \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$, avec égalité ssi $x=0$.

ⓓ Soit $x>0$. La formule de Taylor-Lagrange donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}e^c \quad \text{où} \quad 0<c<x$$

comme $x>0$: $x^3e^c/6 > 0$ donc :

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}.$$

Par contre, pour $x<0$ on a $\frac{x^3}{6}e^c < 0$, soit cette fois

$$e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{-*}$$

ⓔ Soit $x<0$. Taylor-Lagrange vous donne :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}e^c, \quad 0<c<x$$

comme $x<0$, $x^3<0$ on a donc :

$$e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}e^c$$

$$< 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \quad \left(\text{car } e^c < e^0 = 1 \text{ et } -\frac{x^3}{6} > 0\right)$$

Taylor-Lagrange vous donne aussi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}e^c$$

$$> 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad \text{car } \frac{x^4}{24}e^c > 0 \quad \forall x<0$$