CC1 – Mathématiques
L1 – PC
Lundi 3 mars 2008

Calculatrices et documents sont interdits. Durée de l'épreuve : 2 heures.

Questions de cours

1. Enoncer sans démonstration le théorème du rang.

2. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Donner la définition du noyau $\mathrm{Ker}(f)$. Démontrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + 2y + 3z, x + 5y + 6z).$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $u = (1, 0, 0) = e_1$, $v = (1, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que v et w forment une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Calculer $\dim \mathrm{Ker}(f)$.
5. Soit $u' = (1, 1, -1)$. Montrer que $\{u\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
6. On pose $v' = (0, -9, 7)$ et $w' = w = (1, 1, 2)$. Montrer que $\{u', v', w'\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice B de f dans la base (u', v', w').

Exercice 2

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que $A = \{\text{fonctions paires}\}$ et $B = \{\text{fonctions impaires}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $E = A \oplus B$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2z, y).$$

1. Vérifier que f est linéaire.
2. Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.

3. L'application f est-elle injective ?
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
5. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$. L'application f est-elle surjective ?
6. Soit $u_1 = (2, 0, -1)$, $u_2 = (0, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$. Montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Soit $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (0, 1)$. Montrer que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
8. Déterminer la matrice B de f dans les bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$.

Fin du sujet