AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES. 25/10/2002

1. STRUCTURE DE $\mathcal{L}(E)$, RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES...

Exercice 1. *Soit* $A \in M_3(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A^4 = A^2$ *et* $\{-1, +1\} \subset sp(A)$. *Montrer que* A *est diagonalisable dans* $M_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2. *Soit* $A \in GL_6(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ & $Tr(A) = 8$. *Calculer le polynôme caractéristique de* A.

Exercice 3. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A^4 + A^3 - 2A^2 + A + I_n = 0$, *montrer que* n *est pair et que* $-Tr(A) \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. *Soit* $A = ((a_{ij} = 1)) \in M_n(\mathbb{R})$. *Sans aucun calcul déterminer le spectre de* A, *ses polynômes caractéristique et minimal,* A *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 5. *Pour* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, *montrer l'équivalence entre*
★. f *est diagonalisable.*
★. *Tout sous-espace de* $\mathbb{R}^n$ *posséde un supplémentaire stable par* f

Exercice 6. *Etudier la diagonalisabilité de* $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ *définie par* $\varphi(A) = -A + Tr(A)I_n,\ A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7. *Soient* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. *S'il existe* $p \in \mathbb{N}^\star$ *tel que* $A^p = B$, *montrer que* A *est diagonalisable si, et seulement si* B *l'est.*

Exercice 8. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *unitaire de degré* d. *Montrer que* P *est scindé dans* $\mathbb{R}[X]$ *si et seulement si* $\forall z \in \mathbb{C} : |P(z)| \geq |\Im m(z)|^d$. *Soient* E *un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel de dimension finie* n *et une suite* $(L_n)_n \subset \mathcal{L}(E)$ *d'endomorphismes trigonalisables qui converge dans* $\mathcal{L}(E)$ *vers* L, *montrer que* L *est trigonalisable. Que dire si on remplace trigonalisable par diagonalisable ?*

Exercice 9. *Soient* $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ *tel que* $aA + bB + cC$ *possède une valeur propre double.*

Exercice 10. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.*

Exercice 11. *Soient* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et deux entiers* $n > p$; *on se propose de démontrer que les groupes* $GL_n(\mathbb{K})$ *et* $GL_p(\mathbb{K})$ *ne sont pas isomorphes. Pour cela à l'aide du sous groupe* G *de* $GL_n(\mathbb{K})$ *constitué des matrices diagonales à spectre dans* $\{-1, +1\}$*montrer qu'un tel isomorphisme ne peut exister.*

Exercice 12. *Soient* $n, p \in \mathbb{N}^\star$ *et deux matrices* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ *telles que* $A^p = B$. *Montrer que* A *est diagonalisable si et seulement si* B *l'est.*

Exercice 13. *Soit* $A \in M_2(\mathbb{Z})$, *S'il existe* $n \in \mathbb{N}^\star$ *tel que* $A^n = I_2$ *montrer que* $A^{12} = I_2$.

Exercice 14. *Soit* $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$ *avec* $a_{i,j} = 1,\ 1 \leq i, j \leq n$. *Expliquer sans calculs pourquoi* A *est diagonalisable, préciser ses valeurs propres ainsi qu'une base de vecteurs propres.*

Exercice 15. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^3 + A^2 + A = 0$. *Montrer que le rang de* A *est pair.*

Exercice 16. *Montrer que deux matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ le sont dans $M_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 17. *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$*
$\star$ *Montrer que tout sous espace propre de f est stable par g.*
$\star$ *Montrer qu'il existe un vecteur propre commun à f et g.*
$\star$ *Si f et g sont diagonalisables, montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs à f et g.*

Exercice 18. *Soit $G = \{A_1, \dots, A_p\} \subset M_n(\mathbb{C})$ un groupe multiplicatif . On pose $A = A_1 + \cdots + A_p$, calculer A^2 en déduire que A est diagonalisable et* $\det(A) \equiv 0(p)$.

Exercice 19. *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $N(p) = \sup_{||x||=1} || p(x) ||= 1$ où la norme sur E est celle subordonnée à la structure Euclidienne de E.*

Exercice 20. *Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$ à racines de module égal à 1. On se propose de démontrer qu'alors ce sont des racines de l'unité. Via les matrices compagnon, il suffit de montrer si les zéros d'un polynôme unitaire $P \in \mathbb{Z}[X]$ sont de module 1 alors ce sont des racines de l'unité.*
$\star$ *Montrer que pour tout entier n, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes unitaires $P \in \mathbb{Z}_n[X]$ dont toutes les racines sont de module 1.*
$\star$ *En raisonnant par l'absurde, s'il existe un polynôme unitaire $P \in \mathbb{Z}_n[X]$ admettant une racine ζ de module 1 qui n'est pas un racine de l'unité, montrer que pour tout entier $l \geq 1$ on peut construire un polynôme unitaire $Q_l \in \mathbb{Z}_n[X]$ admettant comme zéros les zéros de P à la puissance l. Conclure.*

Exercice 21. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer que* $\det A = trA + 1$.

Exercice 22. *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous espace de E possède un supplémentaire stable par f.*

Exercice 23. *Soit $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$, où t est un réel. Soient $\alpha(t) \leq \beta(t) \leq \gamma(t)$ les valeurs propres de $M(t)$. Montrer :*

$$\alpha(t) < \beta(t) < 2 < \gamma(t).$$

Montrer que lorsque t tends vers $+\infty$, $\alpha(t)$ tends vers 0 et $\beta(t)$ tends vers 2. Enfin montrer que $\gamma(t) = t + 0(t)$. On pose $T_n = tr((M(1))^n)$ et montrer que T_n est l'entier le plus proche de $\gamma(1)^n + 1$.

Exercice 24. *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 3 et φ un endomorphisme de E vérifiant :*

$$\varphi^2 = \varphi^3, \ \varphi \neq 0, \ \varphi \neq I_3.$$

Montrer que la matrice de φ est semblable à l'une des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25. *(Une preuve élémentaire à connaitre du théorème de Cayley-Hamilton). Soit $\mathbb{K}$ un corps (ou même un anneau intègre) et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ le plus petit sous espace stable par φ (l'endomorphisme associé à A) contenant x admet une base de la forme $\{x, \varphi(x), \cdots, \varphi^{k-1}(x)\}$. En la complétant et calculant le polynome caractéristique de φ dans cette base vérifier que : $P_A(\varphi)(x) = 0$.*

Exercice 26. *$\mathcal{S}_n$ désignant l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n, calculer si $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$:*

$$\inf_{M=((m_{i,j}))\in\mathcal{S}_n} \sum_{1\leq i,j\leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2.$$

Exercice 27. *Montrer que pour toute matrice A rélle symétrique définie positive :*

$$\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ {}^tXAX{}^tYA^{-1}Y \ \geq \ ({}^tXY)^2.$$

Exercice 28. *Dans un espace Euclidien E on considére trois endomorphismes f, g, h tels que :*

$$fh = g, \quad gh = f, \quad hf = g, \quad f = f^\star, \quad \det f \neq 0,$$

montrer qu'ils sont diagonalisables dans une même base.

Exercice 29. *Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls (procéder par récurrence sur n).*

Exercice 30. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, exprimer le rang de la transposée des cofacteurs de A en fonction du rang de A.*

Exercice 31. *Diagonaliser* $\left(0\ldots 0a_1 \vdots\vdots\vdots 0\ldots 0a_{n-1}a_1\ldots a_{n-1}a_n\right) \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 32. *Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ on pose $\rho(A) := \sup_{\lambda\in sp(A)} |\lambda|$.*
$\star$ *Soit $\|.\|$ une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$ i.e.*

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

Montrer que la suite $(\|A^n\|^{\frac{1}{n}})_n$ admet une limite $l(A)$ vérifiant

$$\rho(A) \leq l(A) \leq \|A\|.$$

$\star$ *Montrer que $l(A)$ ne dépend pas du choix de la norme.*
$\star$ *Montrer que si B est semblable à A alors $l(A) = l(B)$.*
$\star$ *Montrer que $l(A) = \rho(A)$.*

Exercice 33. *(Endomorphismes cycliques, commutant) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E, \{P \in \in \mathbb{K}[X] \ : \ P(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\in \mathbb{K}[X]$ on note π_x son générateur (π_x est appellé le polynôme minimal de x pour f) on désigne enfin par π_f le polynôme minimal de f (i.e. le générateur de l'idéal $\{P \in \in \mathbb{K}[X] \ : \ P(f) = 0\}$ de $\in \mathbb{K}[X]$) et χ_f son polynôme caractéristique. Enfin on rappelle qu'un endomorphisme f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que la famille $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de E et l'ensemble des x vérifiant cette propriété est appelé l'ensemble des générateurs de f.*
1. On suppose f cyclique.
$\star$ *Montrer que pour tout générateur x de f : $\pi_x = \pi_f = \chi_f$.*
$\star$ *Si x est un générateur de f donner l'expression de la matrice de f dans la base $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$.*
$\star$ *Montrer que le commutant de f vérifie*

$$\mathcal{F}_f := \{g \in \mathcal{L}(E) \ : \ fg = gf\} = \mathbb{K}[f].$$

$\star$ *Montrer que la restriction de f à tout espace stable est cyclique.*

2. Dans cette partie f est quelconque.

⋆ *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et de caractéristique nulle ou bien si $\mathbb{K}$ est infini montrer (par reccurence sur n) qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\pi_x = \pi_f$.*

⋆ *Dans le cas général montrer que si π_x et π_y sont premiers entre-eux alors $\pi_{x+y} = \pi_x \pi_y$. En déduire qu'il existe x non nul tel que $\pi_x = \pi_f$.*

⋆ *Montrer que f est cyclique si et seulement si $\pi_x = \chi_f$.*

3. On suppose $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Montrer que f est cyclique si et seulement si $\forall \lambda \in sp(f)\ :\ \dim E_\lambda = 1$. Quels sont les endomorphismes diagonalisables cycliques ?

4. Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des matrices cycliques dans $M_n(\mathbb{K})$.

⋆ *Montrer que $\mathcal{C}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$.*

⋆ *Soient $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{K}^n$, si la restriction de P à V est nulle montrer que $P \equiv 0$.*

⋆ *Montrer que si $P \neq= 0$ alors $\{x \in \mathbb{K}^n\ :\ P(x) \neq= 0\}$ est un ouvert dense de $\mathbb{K}^n$ qui est connexe par arcs si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

⋆ *Soit φ l'application de $M_n(\mathbb{K})$ dans lui même qui à $A \in M_n(\mathbb{K})$ associe la matrice des coordonnées de la famille $I_n, A, \dots, A^{n-1}$ dans la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$; à l'aide de cette fonction montrer que $\mathcal{C}$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$ connexe par arcs.*

⋆ *Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est de dimension supérieure à n (utiliser la question précédente et l'exercice 51).*

Exercice 34. *Montrer que $M_n(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K}) + GL_n(\mathbb{K})$.*

Exercice 35. *Montrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ de rang r est semblable à une matrice de la forme $(I_r 000)$.*

2. Sur le groupe orthogonal.

Exercice 36. *Montrer que toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $A = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ (matrices symétrique à valeurs propres strictement positives), ce résultat subsiste dans $M_n(\mathbb{R})$ sans l'unicité.*

Exercice 37. *Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ (même conclusion dans $GL_n(\mathbb{C})$ pour le groupe unitaire $U_n(\mathbb{C})$).*

Exercice 38. *Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, montrer que les valeurs propres des ééments de G sont de module 1. Si $O_n(\mathbb{R}) < G$ et $GL_n(\mathbb{R})$ montrer qu'alors $G = GL_n(\mathbb{R})$ (i.e. $O_n(\mathbb{R})$ est maximal)(utiliser l'exercice 29). Même remarque que dans l'exercice précédent.*

Exercice 39. *Montrer que l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité $\mathcal{B}$ de $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme subordonnée à la structure Euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$ (si $\mathcal{C}$ est convexe, $x \in \mathcal{C}$ est extremal si et seulement si la propriété suivante est réalisée : $\forall y, z \in \mathcal{C}\ \forall t \in]0,1[: (x = ty + (1-t)z) \to (x = y = z)$).*

Exercice 40. *Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes qui sont connexes par arc.*

3. TOPOLOGIE DANS $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 41. *Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 42. *Soit $F \subset \mathbb{C}$ une partie fermée et $\mathcal{F} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ sp(M) \subset F\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est fermée dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 43. *Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des projecteurs orthogonaux est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$ (on pourra, mais ce n'est pas obligatoire utiliser l'exercice* 12 *).*

Exercice 44. *Montrer que les ensembles $\{M \in \mathcal{P}_n \ : \ rang(M) = k\}$ sont connexes par arcs et sont les composantes connexes de $\mathcal{P}_n$.*

Exercice 45. *Montrer que dans $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé connexe par arcs d'intérieur vide. A l'aide de l'exercice précédent montrer que son enveloppe convexe est le sous espace des matrices de trace nulle.*

Exercice 46. *Soit F un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ possédant au moins une matrice inversible, montrer que $F \cap M_n(\mathbb{R})$ est dense dans F.*

Exercice 47. *Trouver dans $M_n(\mathbb{R})$ l'adhérence des matrices diagonales. Même question dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 48. *Montrer que dans $M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé connexe par arcs d'intérieur vide et que son enveloppe convexe est l'ensemble des matrices de trace nulle.*

Exercice 49. *Montrer que l'application $\varphi \ : \ A \in M_n(\mathbb{R}) \to \varphi(A) = rg(A)$ est semi-continue inférieurement (sci) sur $M_n(\mathbb{R})$ ($f \ : X \to \mathbb{R}$ est sci $\iff$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'ensemble de niveau $\{f > a\}$ est ouvert dans $X \iff \forall x \in X,\ \forall (x_n)_n \subset X \ : \ \lim_n x_n = x$ implique $\limsup_n f(x_n) \geq f(x)$. En déduire que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à r, $(0 \leq r \leq n)$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.*
Pour $r < n$, montrer que l'ensemble des matrices de rang r est un ensemble d'intérieur vide dont l'adhérence dans $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal a r.

Exercice 50. *Montrer que l'application déterminant est $\mathcal{C}^\infty$ sur $M_n(\mathbb{C})$ et que $D(\det(A)H = tr({}^t com(A)H),\ \forall A, H \in M_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 51. *Soit p une semi-norme sur $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $p(AB) \leq p(A)p(B)$, montrer qu'ou bien $p \equiv 0$ ou bien p est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 52.

References

[1] J.Chevallet *Exercices d'algèbre et de géométrie*, Vuibert supérieur (1996).
[2] C.Grunspan & E.Lanzmann *L'oral de mathématiques aux concours : Algèbre*, Vuibert supérieur (1994).
[3] E.Leichtnam *Exercices corrigés de mathématiques(X, E.N.S.) : Algb̀re et géomŕie*, Ellipses (1999).
[4] J.E.Rombaldi *Analyse matricielle : cours et exercices résolus*, EDP Sciences (1999).
[5] P.Tauvel *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : Algèbre 2*, Masson (1994).

March 7, 2008

E-mail address: lassere@wanadoo.fr & lassere@picard.ups-tlse.fr