Agrégation Interne **2006/2007**

Samedi 25 novembre 2006 : corrigé du second devoir en salle

Première partie.

(1) C'est tout à fait classique.

(2) Pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$(x^p)^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{p!}{(p-k)!}x^{p-k} & \text{si } k \leq p, \\ 0 & \text{si } k > p \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|x^p\|_n = \begin{cases} \dfrac{p!}{(p-n)!} & \text{si } n \leq p, \\ p! & \text{si } n > p. \end{cases}$$

(3) $A_n(f)$ est dans $\mathscr{C}^n([-1,1])$ comme produit de deux fonctions de $\mathscr{C}^n([-1,1])$, ainsi $A_n(\mathscr{C}^n([-1,1])) \subset \mathscr{C}^n([-1,1])$. En dérivant k fois $(1 \leq k \leq n)$ $A_n(f)(x) = xf(x)$ on a $(A_n(f))^{(k)}(x) = xf^{(k)}(x) + kf^{(k-1)}(x)$ qui donne $\|A_n(f)^{(k)}\|_0 \leq \|f^{(k)}\|_0 + k\|f^{(k-1)}\|_0 \leq (n+1)\|f\|_n$; et pour $k = 0$: $\|A_n(f)^{(k)}\|_0 = \|A_n(f)\|_0 = \|f\|_0 \leq (n+1)\|f\|_n$ soit finalement

$$\|A_n(f)^{(k)}\|_n \leq (n+1)\|f\|_n, \quad \forall\, f \in \mathscr{C}^n([-1,1]).$$

L'égalité ayant lieu pour $f(x) = x^n$, A_n est donc un endormorphisme continu de $\mathscr{C}^n([-1,1])$ de norme $|||A_n||| = n+1$.

(4) Soit $f \in \mathscr{C}^n([-1,1])$. Écrivons

$$B_n(f)(x) = \int_0^1 f'(xt)dt = \int_0^1 h(x,t)dt.$$

où h est de classe C^n sur $[-1,1] \times [0,1]$. En particulier ses dérivées partielles

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = t^k f^{(k+1)}(xt), \quad 0 \leq k \leq n-1$$

sont uniformément bornées par $\|f\|_n \in L^([0,1])$: le théorème de régularité des intégrales à paramétres nous assure que $B_n(f) \in \mathscr{C}^{n-1}([-1,1])$ et

$$B_n(f)^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(xt)dt, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

La linéarité étant évidente, B_n est une application linéaire de $\mathscr{C}^n([-1,1])$ dans $\mathscr{C}^{(n-1)}([-1,1])$. En outre, vu la formule précédente, on a pour $0 \leq k \leq n-1$

$$|B_n(f)^{(k)}(x)| \leq \int_0^1 |t^k f^{(k+1)}(xt)|dt \leq \|f\|_n$$

avec égalité si $f(x) = x$. B_n est donc une application linéaire continue de $\mathscr{C}^n([-1,1])$ dans $\mathscr{C}^{(n-1)}([-1,1])$ de norme $|||B_n||| = 1$

(5) Soit $f \in \mathscr{C}^n([-1,1])$. On a $A_n(f)'(x) = (xf(x))' = xf'(x) + f(x)$ donc

$$\begin{aligned} B_n \circ A_n(f)(x) &= \int_0^1 (A_n)(f)'(xt)dt \\ &= \int_0^1 \left[xtf'(xt) + f(xt)\right] dt \\ &= [tf(xt)]_0^1 = f(x). \end{aligned}$$

De même

$$A_n \circ B_n(f)(x) = A_n(x \mapsto \int_0^1 f'(xt)dt) = x\int_0^1 f'(xt)dt = [f(xt)]_0^1 = f(x) - f(0).$$

(6) Soit $f \in \mathscr{C}^n([-1,1])$.

(6-a) Alors $g(x) = A_0(f)(x) = xf(x)$ est continue sur $[-1,1]$, nulle à l'origine et vérifie pour $x \neq 0$

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$$

soit $\mathrm{Im(A_0)} \subset \mathscr{F}_0$. Pour l'inclusion inverse, si $g \in \mathscr{F}_0$ avec $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = L$; alors la fonction f définie sur $[-1,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} L & \text{si } \ x = 0, \\ g(x)/x & \text{sinon.} \end{cases}$$

est bien continue sur $[-1,1]$ et vérifie $A_0(f) = g$.

(6-b) Soit $f \in \mathscr{C}^n([-1,1])$, alors $g = A_n(f) \in \mathscr{C}^n([-1,1])$ et on a

$$g^{(n)}(x) = (xf(x))^{(n)} = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x) \text{ et en particulier } \ g^{(n)}(0) = nf^{(n-1)}(0).$$

Donc, pour $x \neq 0$

$$\frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} = f^{(n)}(x) + n\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} (n+1)f^{(n)}(0)$$

soit $g \in \mathscr{F}_n$ et $\mathrm{Im(A_n)} \subset \mathscr{F}_\mathrm{n}$.

(6-c) Inversement, considérons $g \in \mathscr{F}_n$ et $f = B_n(g)$; on peut écrire pour $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 xg'(xt)dt = \frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{g(x)}{x} \tag{1}$$

ce qui assure que f est déja de classe C^n sur $[-1,1] \setminus \{0\}$. Mais par ailleurs, du fait que $g \in \mathscr{F}_n$ la fonction

$$\varphi \ : \ [-1,1] \setminus \{0\} \ni x \mapsto \varphi(x) = \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x}$$

admet un prolongement continu à l'origine qu'on notera encore φ. En dérivant $n-1$ fois la relation $f = B_n(g)$ on a $f^{(n-1)}(x) = \int_0^1 t^{n-1} g^{(n)}(xt)dt$ qui nous donne

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \int_0^1 t^{n-1}\varphi^{(n)}(xt)dt, \quad \forall\, x \in [-1,1] \setminus \{0\}.$$

Mais la fonction $[-1,1]\times[0,1]\ni(x,t)\mapsto t^{n-1}\varphi^{(n)}$ étant continue et dominée par $\|\varphi\|_0\in L^1(\mathbb{R})$, le théorème de continuité des intégrales à paramètres nous assure la continuité sur $[-1,1]$ de $x\mapsto\int_0^1 t^{n-1}\varphi^{(n)}(xt)dt$, donc en $x=0$ soit

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x}=\frac{\varphi(0)}{n+1}=\frac{1}{n+1}\lim_{x\to 0}\frac{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(0)}{x}\in\mathbb{R}\tag{2}$$

(6-d) En dérivant n fois la formule $xf(x)=g(x)$ on trouve

$$nf^{(n-1)}(0)=g^{(n)}(0)\quad\text{et pour}\quad x\neq 0\ :\ f^{(n)}(x)=\frac{g^{(n)}(x)-nf^{(n-1)}(x)}{x}.$$

Mais nous disposons aussi des développements limités à l'origine découlant de la définition de φ et de la question précedente :

$$g^{(n)}(x)=g^{(n)}(0)+x\varphi(0)+o(x),$$

car φ se prolonge continuement à l'origine par $\varphi(0)=g^{(n+1)}(0)$, et

$$f^{(n)}(x)=f^{(n-1)}(0)+x\frac{\varphi(0)}{n+1}+o(x)$$

car $f^{(n-1)}$ est dérivable à l'origine (c.f. (2)) et $f^{(n)}(0)=\dfrac{\varphi(0)}{n+1}$. Si bien qu'en reportant ces deux développements on trouve

$$f^{(n)}(x)=\frac{g^{(n)}(x)-nf^{(n-1)}(x)}{x}=\frac{\varphi(0)}{n+1}+o(1)$$

qui assure la continuité de $f^{(n)}$ en $x=0$ et donc $f\in\mathscr{C}^n([-1,1])$.

(6-e) Il est maintenant temps de conclure que $\mathscr{F}_n\subset\mathrm{Im}(A_n)$ car nous venons de vérifier que pour tout $g\in\mathscr{F}_n$ l'application $f=B_n(g)$ est dans $\mathscr{C}^n([-1,1])$ et vérifie $A_n(f)=g$ d'où l'inclusion et finalement l'égalité.

Seconde partie.

(7) Il est déja de bon ton de remarquer que la série définissant $\delta(f)$ converge pour toute fonction $f\in\mathscr{C}^\infty([-1,1])$ car son terme général est majoré par 2^{-n}.

Considérons la fonction ρ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\rho(t)=\dfrac{t}{1+t}$: elle est strictement croissante (sa dérivée vaut $\rho'(t)=(1+t)^{-2}>0$) et vérifie

$$\rho(u+v)\leq\rho(u)+\rho(v),\quad\forall\, u,v\in\mathbb{R}_+\tag{$\bigstar$}$$

car on a pour $u,v\in\mathbb{R}_+$

$$\rho(u+v)-\rho(u)+\rho(v)=-\frac{uv(u+v+2)}{(1+u)(1+v)(1+u+v)}\leq 0.$$

Si bien que pour $f, g, h \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])$

$$\begin{aligned}\delta(f-h) &= \sum_{n\geq 0} 2^{-n}\rho(\|f-h\|_n)\\ &\leq \sum_{n\geq 0} 2^{-n}\rho(\|f-h\|_n + \|h-g\|_n) \quad \text{(croissance de } \rho)\\ &\leq \sum_{n\geq 0} 2^{-n}\rho(\|f-h\|_n) + \rho(\|h-g\|_n) \quad \text{(d'après } (\bigstar))\\ &\leq \delta(f-g)+\delta(g-h)\end{aligned}$$

Soit l'inégalité demandée.

(8) $(\Longrightarrow)$ Quitte à remplacer f_k par $f_k - f$ supposons que $\lim_k \delta(f_k) = 0$ i.e.

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ k \geq k_\varepsilon \quad \delta(f_k) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n}\frac{\|f_k\|_n}{1+\|f_k\|_n} \leq \varepsilon.$$

D'où en particulier

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ k \geq k_\varepsilon \quad 2^{-n}\frac{\|f_k\|_n}{1+\|f_k\|_n} \leq \varepsilon,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

i.e.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_k \rho(\|f_k\|_n) = 0.$$

Mais l'application ρ est bijection bicontinue de $\mathbb{R}_+$ sur $[0,1[$ vérifiant $\rho(0) = 0$: la formule précédente implique alors que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_k \|f_k\|_n = 0$$

ou encore

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N},\ k \geq k_\varepsilon\ :\quad \|f_k^{(n)}\|_0 \leq \varepsilon,$$

autrement dit, la suite $(f_k^{(n)})_k$ est uniformément convergente vers 0 sur $[-1,1]$ et ceci pour tout entier n.

$(\Longleftarrow)$ Réciproquement, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(f_k^{(n)})_k$ est uniformément convergente vers 0 sur $[-1,1]$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \lim_k \|f_k\|_N \leq \lim_k \|f_k\|_0 + \|f_k'\|_0 + \cdots + \|f_k^{(N)}\|_0 = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ vérifiant $2^{-N} \leq \varepsilon$; on peut écrire

$$\begin{aligned}\delta(f_k) =&\leq \sum_{n=0}^{N} 2^{-n}\frac{\|f_k\|_n}{1+\|f_k\|_n} + \sum_{n\geq N+1}^{\infty} 2^{-n}\frac{\|f_k\|_n}{1+\|f_k\|_n}\\ &\leq (N+1)\|f_n\|_N + 2^{-N} \leq 2\varepsilon \ \text{ pour } k \geq k_\varepsilon,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(9) Soit $(f_k)_k$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$, il s'agit de montrer qu'elle est convergente dans $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$ i.e. il existe $f \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])$ telle que $\lim_k \delta(f - f_k) = 0$.
$(f_k)_k$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$ se traduit comme dans la première implication de la question précédente par :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon\ :\ \forall\, k, l \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ :\quad \|f_{k+l}^{(n)} - f_k^{(n)}\|_0 \leq \varepsilon,$$

en d'autres termes la suite $(f_k)_k$ ainsi que toutes les suites de ses dérivées vérifient le critère de Cauchy uniforme sur $[-1,1]$: par un théorème classique de seconde année, il existe $f \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])$ telle que $\lim_k f_k^{(n)} = f^{(n)}$ uniformément sur $[-1,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il ne reste plus alors qu'a invoquer la seconde implication de la question précédente pour pouvoir affirmer que $(f_k)_k$ converge vers f dans $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$.

(10) Comme $\mathscr{C}^\infty([-1,1]) \subset \mathscr{C}^n([-1,1])$ pour tout entier n les résultats de la question (5) subsistent :

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^\infty([-1,1]), \quad A\circ B(f)(x) = f(x) - f(0), \quad B \circ A(f)(x) = f(x).$$

(11) Vu ce qui précède, $B\circ A = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}^\infty([-1,1])}$ si bien que B est surjective et A injective soit

$$\mathrm{Im(B)} = \mathscr{C}^\infty([-1,1]), \quad \ker(\mathrm{A}) = \{0_{\mathscr{C}^\infty([-1,1])}\}.$$

Vérifions maintenant que $\mathrm{Im(A)} = \mathrm{F} := \{\mathrm{f} \in \mathscr{C}^\infty([-1,1]) \ : \ \mathrm{f}(0) = 0\}$. L'inclusion $\mathrm{Im(A)} \subset \mathrm{F}$ est trivialle, pour l'autre inclusion, soit $g \in F$; g est de classe C^∞ et s'annule à l'origine : en particulier $g \in \mathscr{F}_n$ pour tout entier n. Maintenant d'aprés la question (6), $f = Bg$ est de classe C^n et vérifie $Af = g$ i.e. $g \in \mathrm{Im(A)}$.

Il reste à déterminer $\ker(B)$: il est déja clair que toute fonction constante est dans $\ker(B)$; réciproquement soit $f \in \ker(B)$, on a

$$Bf = 0 \implies AB(f) = 0 \ \text{ i.e. } f(x) - f(0) = 0, \ \forall\, x \in [-1,1]$$

f est donc bien constante.

(12) Comme le suggère l'énonçé, on va procéder par récurrence sur $n \geq 1$.

(12-a) Si $n = 1$, on retrouve la définition de B.

(12-b) L'application $(x,t) \mapsto \varphi_n(t) g^{(n)}(xt)$ étant continue sur le compact $[-1,1]\times[0,1]$ la continuité de $H(x) := \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(t) g^{(n)}(xt)dt$ sur $[-1,1]$ est assurée comme dans les questions précédentes par les théorèmes de régularité des intégrales à paramètres.

(12-c) Supposons la propriété vraie au rang $n-1 \geq 1$, une intégration par parties (légitime) nous donne

$$\begin{aligned}
xH(x) = x\int_0^1 \varphi_n(t) g^{(n)}(xt)dt &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} x g^{(n)}(xt)dt \\
&= \left[\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(xt)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-2}}{(n-2)!} g^{(n-1)}(xt)dt \\
&= \left[\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(xt)\right]_0^1 + B^{n-1}(g)(x) \quad \text{(hypothèse de récurrence au rang } n-1) \\
&= B^{n-1}(g)(x) - \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\
&= B^{n-1}(g)(x) - B^{n-1}(g)(0) \quad \text{(hypothèse de récurrence au rang } n-1 \text{ en } x = 0)
\end{aligned}$$

(12-d) Vu (10), la formule ci-dessus s'écrit aussi sous la forme

$$A_0(H)(x) = xH(x) = B^{n-1}(g)(x) - B^{n-1}(g)(0) = A_0(B^n(g))(x)$$

i.e.

$$A_0(H) = A_0(B^n(g)),$$

enfin, A_0 étant injective ($xf(x) \equiv 0$ implique $\equiv 0$ car f est continue...) il en résulte que $H = B^n(g)$ ce qui est exactement la propriété au rang n, CQFD.

(13) Pour $x=0$, la formule de la question précédente donne

$$B^n(g)(0) = \frac{g(n)(0)}{n!}.$$

(14) Par récurrence sur $n \geq 1$. C'est clair si $n=1$; supposons la formule vraie au rang $n-1 \geq 1$ et soit $g \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])$.

$$\begin{aligned} A^{n+1}B^{n+1}(g)(x) &= A^n(ABB^n)(g)(x) = A^n(B^n(g)(x) - B^n(g)(0)) \\ &= A^n(B^n(g))(x) - A^n(B^n(g))(0) \\ &= g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k - A^n(B^n(g))(0) \quad \text{(hypothèse de récurrence au rang } n-1) \\ &= g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k - \frac{g(n)(0)}{n!}xn \quad \text{vu (13) et la definition de } A^n) \\ &= g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k \end{aligned}$$

d'où la propriété au rang n, CQFD.

(15) Soit $g \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])$, on peut écrire

$$\begin{aligned} A^{n+1}B^{n+1}(g)(x) &= g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &= x^{n+1}B^{n+1}(g)(x) = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}g^{(n+1)}(xt)dt \\ &= \int_0^1 \frac{(x-u)^n}{n!}g^{(n+1)}(u)du \quad \text{(avec le changement } \ u = xt) \end{aligned}$$

soit

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^1 \frac{(x-u)^n}{n!}g^{(n+1)}(u)du$$

on retrouve bien la formule de Taylor avec reste intégral.

(16) • Soit $n \geq 1$. Du fait que B est surjectif, l'image de A^n est aussi l'image de A^nB^n. Or pour $g \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])$, $h = A^nB^n(g)$ vérifie

$$h(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

donc on a $h^{(k)}(0) = 0, \ \forall\, 0 \leq k \leq n-1$.

Inversement, soit $h \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])$ vérifiant $h^{(k)}(0) = 0, \ \forall\, 0 \leq k \leq n-1$; on peut alors écrire pour tout $x \in [-1,1]$

$$h(x) = h(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!}x^k = (A^nB^n)(h)(x)$$

et donc $h \in \mathrm{Im(A^nB^n)} = \mathrm{Im(A^n)}$. On a donc

$$\mathrm{Im(A^n)} = \{\, \mathrm{f} \in \mathscr{C}^\infty([-1,1]) \ : \ \mathrm{f^{(k)}(0) = 0, \ \forall\, 0 \leq k \leq n-1}\}.$$

• Vérifions que le noyau de B^n est constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet soit $g \in \mathbb{R}_{n-1}(x)$, alors g^n est nulle et vu (12), $B^n(g)$ aussi. Réciproquement, si $B^n(g)$ est nulle on a d'aprés (14)

$$0 = A^n B^n(g)(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

soit

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \in \mathbb{R}_{n-1}(x).$$

d'où le résultat.

Troisième partie.

(17) Considérons une suite $(f_n)_n$ convergente dans $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$ de limite f, i.e. $\lim_n \delta(f_n - f) = 0$. D'aprés la question (8) pour tout entier k, la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $f^{(k)}$; la convergence uniforme impliquant la convergence simple, nous avons en particulier

$$\lim_n f_n^{(i)}(\alpha) = f^{(i)}(\alpha), \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \alpha \in [-1,1],$$

i.e.

$$\lim_n T_{\alpha,i}(f_n) = T_{\alpha,i}(f)$$

ainsi, on a bien $T_{\alpha,i} \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])$.

(18) Soit $T \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$. Si une suite $(f_k)_k$ converge vers f dans $\mathscr{C}^\infty([-1,1])$ alors (toujours la question (8)) nous avons pour tout entier n : $\lim_k \|f_k - f\|_n = 0$, autrement dit la suite $(f_k)_k$ converge vers f dans $\mathscr{C}^n([-1,1])$ pour tout n. Fixons n, comme A_n est continue sur $\mathscr{C}^n([-1,1])$ on a

$$\lim_k A_n(f_k) = \lim_k A(f_k) = A(f) \quad \text{dans } \ \mathscr{C}^n([-1,1]).$$

En d'autre termes $(A(f_k))_k$ converge vers $A(f)$ dans $\mathscr{C}^n([-1,1])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui (question (8)) équivaut à dire que $\lim_k \delta(A(f_k) - A(f)) = 0$ qui implique à son tour par continuité de T que $\lim_k T(A(f_k)) = T(A(f))$ i.e. $T \circ A \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$ ce qu'il fallait démontrer (la preuve est identique pour $T \circ B$...)

(19) Nous avons

$$A' \circ B'(T) = A'(T \circ B) = T \circ B \circ A = T$$

car $B \circ A = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}^\infty([-1,1])}$ (question 10), ainsi $A' \circ B' = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}^\infty([-1,1])'}$.

(20) $A' \circ B' = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}^\infty([-1,1])'}$ assure l'injectivité de B' (et donc de B'^n, $n \in \mathbb{N}$) ainsi que la surjectivité de A' (et donc de A'^n, $n \in \mathbb{N}$). Nous avons donc déja

$$\ker(B'^n) = \{0_{\mathscr{C}^\infty([-1,1])'}\}, \quad \mathrm{Im}(A'^n) = \mathscr{C}^\infty([-1,1])', \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Par ailleurs, comme pour $f \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])$ et $n \in \mathbb{N}$

$$A^n B^n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad x \in [-1,1],$$

on aura pour $T \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$

$$B'^n A'^n(T)(f) = T \circ (A^n B^n(f)) = T(f) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} T(X^k) = T(f) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T(X^k)}{k!} T_{0,k}(f).$$

B'^n étant injectif, $\ker(A'^n) = \ker(B'^n A' n)$, l'égalité précédente nous assure que

$$\ker(A'^n) = \left\{ T \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])' \ : \ T = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T(X^k)}{k!} T_{0,k} \right\} \subset \operatorname{vect}\{\, T_{0,k},\ 0 \le k \le n-1\}.$$

Pour l'inclusion inverse, il suffit de remarquer que $T_{0,k} \in \ker(A'^n)$ pour tout $0 \le k \le n-1$ (car $T_{0,k}(X^l) = l!\delta_k^l\ldots$). Ainsi

$$\ker(A'^n) = \operatorname{vect}\{\, T_{0,k},\ 0 \le k \le n-1\}.$$

Il reste à montrer que les formes $T_{0,k},\ 0 \le k \le n-1$ sont libres dans $\mathscr{C}^\infty([-1,1])'$: supposons qu'il existe une suite de scalaires $(\lambda_k)_0^{n-1}$ vérifiant $\lambda_0 T_{0,0} + \lambda_1 T_{0,1} + \cdots + \lambda_{n-1} T_{0,n-1} = 0_{\mathscr{C}^\infty([-1,1])'}$, en appliquant cette formule à $T = T_{0,l}$ $(0 \le l \le n-1)$ il vient $l!\lambda_l = 0$: donc tous les λ_k sont nuls et la famille $T_{0,k},\ 0 \le k \le n-1$ constitue bien une base de $\ker(A'^n)$.

(21) Soit $f \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$. Comme $A' \circ T_{0,0}(f) = T_{0,0}(A(f)) = 0$ et, pour $i \ge 1$

$$A' \circ T_{0,i}(f) = T_{0,i}(A(f)) = (A(f))^{(i)}(0) = i f^{(i-1)}(0) = i T_{0,i-1}(f)$$

nous pouvons écrire

$$A' \circ T_{0,i} = i T_{0,i-1}.$$

En itérant cette formule on tire

$$A'^n \circ T_{0,n} = n! T_{0,0}, \quad n \in \mathbb{N}^\star.$$

Avec la description du noyau de A'^n de la question précédente, cette formule implique que l'ensemble des solutions de l'équation $A'^n(T) = T_{0,0}$ est le sous espace affine

$$\left\{ \frac{T_{0,0}}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k T_{0,k},\ \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(22) Comme les L_i commutent deux a deux, nous avons $L_1 \ldots L_r = V_i L_i$ où $V_i = L_1 \ldots L_{i-1} L_{i+1} \ldots L_r$ qui implique que $\ker(L_i) \subset \ker(L_1 \ldots L_r)$ et par conséquent

$$\sum_{i=1}^{r} \ker(L_i) \subset \ker(L_1 \ldots L_r).$$

Pour l'inclusion réciproque, on va procéder par récurrence sur $r \ge 1$. La propriété est trivialement réalisée si $r = 1$, supposons la vraie pour $r-1$ endormorphismes vérifiant les conditions de l'énoncé et considérons r endomorphismes vérifiant ces mêmes conditions. Soit $x \in G$ tel que $L_1 \ldots L_r(x) = 0$ i.e. $L_r(x) \in \ker(L_1 \ldots L_{r-1})$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} L_r(x) \in \ker(L_1 \ldots L_{r-1}) &= \ker(L_1) + \cdots + \ker(L_{r-1}) \\ &= L_r(\ker(L_1)) + \cdots + L_r(\ker(L_{r-1})), \\ &= L_r(\ker(L_1) + \cdots + \ker(L_{r-1})) \end{aligned}$$

il existe donc $y \in \ker(L_1) + \cdots + \ker(L_{r-1})$ tel que $L_(x) = L_r(y)$ i.e. $x - y \in \ker(L_r)$ soit $x \in \ker(L_1) + \cdots + \ker(L_{r-1}) + \ker(L_r)$, ce qu'il fallait démontrer.

(23) On suppose que Q n'est pas le polynôme nul (sinon c'est évident) et on le factorise $Q = c\prod_{i=1}^d (X-\alpha_i)^{m_i}$ où c est un complexe non nul, les racines α_i deux à deux distinctes de multiplicités $m_i \geq 1$. Alors clairement

$$T_Q = cS_{\alpha_1}^{m_1} \circ \cdots \circ S_{\alpha_d}^{m_d}.$$

Avec la première propriété admise dans l'énoncé et une facile récurrence, on vérifie

$$S \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])' \ : \ S \circ T_Q = cS \circ S_{\alpha_1}^{m_1} \circ \cdots \circ S_{\alpha_d}^{m_d} \in \mathscr{C}^\infty([-1,1])'$$

ce qu'il fallait démontrer.

(24) Nous allons appliquer la question (22) à la décomposition $T'_Q = c{S'_{\alpha_1}}^{m_1} \circ \cdots \circ {S'_{\alpha_d}}^{m_d}$ en posant $L_i = {S'_{\alpha_i}}^{m_i}$. Cette décomposition et la seconde propriètè admise dans l'énoncé assurent que T'_Q est surjectif. Ensuite, comme les $S_{\alpha_i}^{m_i}$ commutent deux à deux, il en est de même pour les L_i. Enfin, il vaut vérifier que pour tout $i \neq j$, $\ker(L_i) = L_j(\ker(L_i))$ ce qui équivaut à vérifier que pour tout $\alpha \neq \beta$ et $m \geq 1$: $S'_\beta(\ker({S'_\alpha}^m)) = \ker({S'_\alpha}^m)$. Pour cela, avec la question (20) on sait que $\ker({S'_\alpha}^m)$ admet pour base les formes $(T_{\alpha,i})_0^{m-1}$ et que pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty([-1,1]$: $S_\beta(f)(x) = (x-\beta)f(x)$. Donc pour $i = 0$ on a

$$S'_\beta(T_{\alpha,0})(f) = (\alpha-\beta)f(\alpha) \quad \text{soit} \quad S'_\beta(T_{\alpha,0}) = (\alpha-\beta)T_{\alpha,0}$$

et pour $1 \leq i \leq m-1$

$$S_\beta(f)^{(i)}(x) = (x-\beta)f^{(i)}(x) - if^{(i-1)}(x)$$

soit

$$S'_\beta(T_{\alpha,i}) = (\alpha-\beta)T_{\alpha,i} + iT_{\alpha,i-1}.$$

Comme $\alpha \neq \beta$ on a bien $S'_\beta(\ker({S'_\alpha}^m)) = \ker({S'_\alpha}^m)$. Les questions (20) et (22) assurent alors que la famille $\{T_{\alpha_j,i},\ 1 \leq j \leq d,\ 0 \leq i \leq m_j\}$ est une base de $\ker(T'_Q)$.

13 décembre 2006 — Lassère Patrice : Laboratoire de Mathématiques, E.Picard
UMR CNRS 5580. Université Paul Sabatier 119 route de Narbonne 31062 TOULOUSE FRANCE.
lassere@picard.ups-tlse.fr & lassere@wanadoo.fr