Voici comme promis une preuve du théorème de Heine.

Théorème 1. *(**théorème de Heine**) Toute fonction f continue sur un intervalle **fermé borné** $[a, b]$ est uniformément continue.*

Démonstration : On suppose que G est continue sur $I = [a, b]$ et que G n'est pas uniformément continue sur I. On procède par étapes :

(1) *Justifier qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I tels que pour tout entier $n \geq 1$: $|x_n - y_n| \leq 1/n$ et $|G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon$.*

Si G n'est pas uniformément continue sur I, alors : $\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \eta > 0,\ \exists\, (x, y) \in I \times I$ vérifiant $|x - y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Avec $\eta = 1/n$ où $n \in \mathbb{N}^\star$, on obtient deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telles que pour tout entier $n \geq 1$: $|x_n - y_n| \leq 1/n$ et $|G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon$.

(2) *Justifier qu'il existe deux sous-suites convergentes $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telles que pour tout entier $n \geq 1$: $|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leq 1/n$ et $|G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon$.*

Par construction dans la question précédente, les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $I = [a, b]$ fermé borné donc compact. On peut donc extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, disons vers $x \in I$. Pour les mêmes raisons, on extrait aussi de la suite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $y \in I$. La sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore convergente vers x comme sous-suite de la suite convergente $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Ces deux sous-suites $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient encore les mêmes relations que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leq 1/\sigma(n) \leq 1/n$ et $|G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon$ (car la croissance de σ sur $\mathbb{N}^\star$ assure par une récurrence élémentaire que $\sigma(n) \geq n$ pour tout n et donc l'inégalité $1/\sigma(n) \leq 1/n$...).

• On peut aussi observer qu'une double extraction est inutile : on vérifie facilement que la convergence de $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, l'inégalité $|x_{\psi(n)} - y_{\psi(n)}| \leq 1/\psi(n)$, $(n \in \mathbb{N}^\star)$ et $\lim_n \psi(n) = +\infty$ assurent la convergence de la suite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers la même limite que celle de $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

(3) *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}$.

Les relations $\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = x$, $\lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)} = y$ et $|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leq 1/n$ assurent que $x = y$.

(4) *Conclure.*

On a $\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = x = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}$, G étant continue en x on aura $\lim_{n\to+\infty} G(x_{\sigma(n)}) = G(x) = \lim_{n\to+\infty} G(y_{\sigma(n)})$ ce qui est contraire aux inégalités $|G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon$ obtenues en (2) : contradiction, G est bien uniformément continue sur $[a, b]$. ■

3 octobre 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr