☯ AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES ☯
Suites et séries de fonctions – Samedi 16 Juin 2012.

1. Suites de fonctions

Exercice 1. (1) *Etudier la suite de fonctions définie sur* $[1,+\infty[$ *par* $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x}-1)$.

(2) *Etudier la suite de fonctions définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par* $f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{2n} x^k\right)^{-1}$, $n\in\mathbb{N}$.

(3) *Etudier la suite de fonctions définie sur* $[0,1]$ *par* $f_n(x) = 4^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$, $n\in\mathbb{N}$.

(4) *Etudier la suite de fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = \sqrt[2n]{1+x^{2n}}$.

(5) ☯ *On pose pour* $n\in\mathbb{N}$: $f_n(x) = \sqrt{n+1}\sin^n(x)\cos(x)$. *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$, *la convergence est-elle uniforme sur* $\mathbb{R}$?

(6) *Etudier la convergence simple et uniforme sur* $\mathbb{R}_+$ *de la suite de fonctions* $f_n\ :\ x\mapsto x^n e^{-x}/n!$ *et déterminer* $\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt$. *Commentaire ?*

(7) *Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *où* f_n *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_n(x) = \cos^n(x/\sqrt{n})$ *(commencer par montrer que pour tout réel* u : $1-u^2/2 \leq \cos(u) \leq 1-u^2/2+u^4/24$ *puis, que pour tout* $u\in[0,1/2]$: $-u-u^2\leq \log(1-u)\leq -u$*).*

(8) ☯ *Convergence simple et uniforme de la suite de fonctions* $(g_n)_n$ *avec* $g_n(x) = \cos(x/2)\cos(x/2^2)\dots\cos(x/2^n)$.

Exercice 2. ☯ *Soit* $f\ :\ ]0,1]\ni t\mapsto f(t) = \sin(1/t)$. *Montrer que* f *n'est pas limite uniforme sur* $]0,1]$ *d'une suite de polynômes.*

Exercice 3. *Que dire d'une fonction* $f\in\mathscr{C}^0([a,b])$ *vérifiant* $\int_a^b t^n f(t)dt = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$?

Exercice 4. *Soit* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *vérifiant pour tout* $x\in\mathbb{R}^\star$: $|f(x)|<|x|$. *Montrer que la suite des itérés* $(f^n := f\circ f\cdots\circ f)_n$ *est uniformément convergente vers la fonction nulle sur* $[-a,a]$ *pour tout* $a>0$.

Exercice 5. *Soit* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ *vériifiant* $f(0)=0=\lim_{+\infty}f(x)$. *On pose pour* $n\in\mathbb{N}^\star, x\in\mathbb{R}_+$: $g_n(x) = f(nx)f(x/n)$. *Montrer que la suite* $(g_n)_n$ *est uniformément convergente sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6. *Soit* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *vérifiant pour tout* $x\in\mathbb{R}^\star$: $|f(x)|<|x|$. *Montrer que la suite des itérés* $(f^n := f\circ f\cdots\circ f)_n$ *est uniformément convergente vers la fonction nulle sur* $[-a,a]$ *pour tout* $a>0$.

Exercice 7. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions uniformément continues sur* $\mathbb{R}$ *qui converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers* f, *montrer que* f *est uniformément continue.*

Exercice 8. *Soit* $(P_n)_n$ *une suite de polynômes uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$ *vers* f, *montrer que* f *est un polynôme.*

Exercice 9. ☯ *Soit* $d\geq 1$, $(P_n)_n$ *une suite dans* $\mathbb{R}_d[x]$ *de polynômes. Montrer que* $(P_n)_n$ *converge uniformément sur* $[0,1]$ *si et seulement si elle converge simplement sur* $[0,1]$ *(penser aux polynômes d'interpolation de Lagrange). Plus généralement, montrer que tout sous-espace* $\mathscr{V}$ *de dimension finie de* $\mathscr{C}([0,1])$, *convergence simple sur* $[0,1]$ *et uniforme sur* $[0,1]$ *coincident.*

Exercice 10. *Soient* $I\subset\mathbb{R}$ *un intervalle,* $P\in\mathbb{R}[X]\setminus\{X\}$ *vérifiant* $P(I)\subset I$ *et* $(P_n)_n$ *la suite d'applications définie par* $P_1 = P$ *et* $P_{n+1} = P_n\circ P$ *pour tout* $n\geq 2$. *On suppose que la suite* $(P_n)_n$ *converge uniformément sur* I *vers* f. *Montrer que* f *est constante.*

Exercice 11. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide (ou plus généralement d'un espace vectoriel normé) et $(f_n)_n$ une suite d'applications de A dans $\mathbb{K}$. On dira que la suite $(f_n)_n$* ***converge continuement*** *vers $f : A \to \mathbb{K}$ si pour tout $x \in A$, pour toute suite $(x_n)_n \subset A$ convergente vers x la suite $(f_n(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.*

(1) *Montrer que la convergence continue implique la convergence simple.*

(2) *Soit $(f_n)_n$ une telle suite, $x \in A$ et $(x_n)_n$ dans A convergente vers x. Montrer que pour toute sous-suite $(f_{n_k})_k$*
$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x).$$

(3) *Si $(f_n)_n$ converge continuement vers f sur A, montrer que f est continue sur A (**même** si les f_n ne sont pas continues!)*

(4) *Montrer que toute suite $(f_n)_n$ uniformément convergente sur A vers une fonction $f \in \mathscr{C}(A, \mathbb{K})$ converge continuement sur A. La réciproque est-elle vraie ?*

(5) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie compacte K. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(6) *La suite $(f_n)_n$ est uniformément convergente vers $f \in \mathscr{C}^0(K)$.*

(7) *La suite $(f_n)_n$ est continuement convergente sur K vers f.*

2. Séries de fonctions

Exercice 12. (1) ☯ *Montrer que* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2 n^4}$ *est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ et étudier sa dérivabilité à l'origine.*

(2) ☯ *Etudier* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ *sur son domaine de définition, continuité, dérivabilité (en particulier à l'origine...).*

(3) *Montrer que* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Arctan(nx)}{n^2}$ *est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ et étudier sa dérivabilité à l'origine.*

(4) *Etude de la série de fonctions $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{|x|}{x^2+n^2}$ (en particulier, montrer que f est dérivable à gauche et à droite en l'origine).*

(5) *Etude de la série de fonctions $f(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.*

Exercice 13. *Soit $U(x) = \sum_{n\geq 0} (x+x^2)^n$. Domaine de définition de U. Montrer que U est développable en série entière sur un voisinage de l'origine contenant strictement le domaine de U ; commentaire ?*

Exercice 14. (1) *Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$: $\sin(x) \geq 2x/\pi$.*

(2) *Montrer que la fonction f définie par $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.*

(3) *Montrer que f n'est pas dérivable à l'origine.*

Exercice 15. *Montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 1} x^{n^2} \in \mathscr{C}^\infty(]-1,1[)$ et est équivalente à $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\log(x)}}$ en 1_- (comparer avec des intégrales, on rappelle/admet que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$).*

Exercice 16. ☯ *Montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{E(nx)}{n^3}$ (E est la partie entière) est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, discontinue sur $\mathbb{Q}$ (mais tout de même continue à droite).*

Exercice 17. ☯ *Soient $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(]-a,a[, \mathbb{R})$. Si $f^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-a,a[$, montrer qu'alors f est développable en série entière à l'origine sur $]-a,a[$. Ce résultat subsiste-t-il si on suppose seulement $f^{(2n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-a,a[$*

Exercice 18. ☯ *Montrer que pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ il existe une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \Omega$ et $f > 0$ sur Ω.*

Exercice 19. ☯ *Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels et $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une application à support compact dans $]-2,2[$ égale à 1 sur $[-1,1]$. Montrer qu'il existe une suite de nombres réels $(\lambda_n)_n$ tels que les fonctions $f_n(x) := \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(\lambda_n x)$ vérifient $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq 2^{-n}, \quad \forall\, 0 \leq k \leq n-1$. En déduire l'existence d'une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $f^{(n)}(0) = a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 20. ☯ *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^\star$ trois réels deux à deux distincts. Déterminer les applications $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 21. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $(a_n)_n$ une suite d'éléments de A sans points d'accumulation dans A.*

(1) *Montrer que $f\ :\ x \mapsto \sum_{n=0}^\infty \frac{2^{-n}}{4^{-n}+|x-a_n|}$ est définie et continue sur A.*

(2) *Soit K une partie de $\mathbb{R}$ telle que toute fonction continue de K dans $\mathbb{R}$ soit bornée. Montrer que K est compact.*

3. Echanges de limites (première partie)

Exercice 22. *Pour $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ on pose $a_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{nf(t)}{1+n^2t^2} dt$. Aprés avoir justifié la définition de a_n, montrer que la suite a_n converge et préciser sa limite.*

Exercice 23. *On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \int_1^\infty e^{-t^n} dt$. Après avoir justifié la définition de a_n, montrer que la suite a_n converge, préciser sa limite et donner un équivalent de a_n.*

Exercice 24. *Soient $p, q > 0$, montrer que* $$\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t^q} dt = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{nq+p}.$$

Exercice 25. *Montrer que :* $$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} = \int_0^1 x^x dx, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x} dx,.$$

16 juin 2012 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr