Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que deux matrices A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. L'ensemble des matrices semblables à A dans $\mathbb{K}$:

$$\mathscr{S}_A(\mathbb{K}) = \{\, P^{-1}AP, \quad P \in GL_n(\mathbb{K})\,\},$$

est la **classe de similitude** de A.

On dira qu'une matrice est **nilpotente** s'il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $A^l = O_{M_n(\mathbb{K})}$, on écrira alors $A \in \mathscr{N}_n(\mathbb{K})$.

On désignera par $E_{ij} = ((\delta_{kl}^{ij}))_{kl} \in M_n(\mathbb{K})$ (c'est la matrice où tous les éléments sont nuls sauf le (i,j)-ième qui vaut 1) les éléments de la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

Enfin $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ désignera l'ensemble des matrices $A = ((a_{ij})) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle : $\mathrm{trace}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ et pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ (resp. $\in M_n(\mathbb{C})$:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(A\,{}^t\!B), \quad (\text{resp. } \langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(A\,{}^t\overline{B})).$$

Enfin, $M_n(\mathbb{K})$ est équipé de sa topologie usuelle d'espace vectoriel normé.

Préliminaires

(1) Dans cette partie on démontre quelques résultats disparates qui peuvent être utiles dans la suite du problème.

(a) Soit E espace vectoriel normé, montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est soit d'intérieur vide, soit égal à E.

(b) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, montrer que, ou bien A est une homothétie (i.e. $A = \lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{K}$) ou bien il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que la paire $\{x, Ax\}$ soit libre.

Première partie

(2) Dans cette partie on étudie plus en détail les ensembles $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$.

(a) Montrer que $(M_n(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$ un espace Euclidien.

(b) Montrer que $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ dont on précisera une base la dimension et un supplémentaire orthogonal.

(c) Montrer que $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ est un fermé d'intérieur vide dans $M_n(\mathbb{K})$.

(d) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\langle A, X\rangle = 0$ pour toute matrice $X \in \mathscr{T}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A = \lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(e) Si N est une matrice nilpotente non nulle, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = O_{M_n(\mathbb{K})}$ et $N^{p-1} \neq O_{M_n(\mathbb{K})}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que la famille $\{x, Nx, \ldots, N^{p-1}x\}$ soit libre. En déduire que $N^n = O_{M_n(\mathbb{K})}$.

(f) Retrouver le résultat de la question précédente avec le théorème de Cayley-Hamilton.

(g) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ la trace de A^k est nulle. Montrer que A est nilpotente.

(h) Montrer que $\mathscr{N}_n(\mathbb{K}) \subset \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$?

(i) Montrer que $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ est d'intérieur vide.

(j) Montrer que $\mathscr{N}_n(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K}) = \emptyset$, et retrouver le résultat de la question précédente.

(k) Montrer que $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ est un fermé connexe par arc.

Seconde Partie

(3) On se propose de montrer que toute matrice 2×2 de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

(a) Traiter le cas où A n'est pas inversible.

(b) Si $\lambda \neq 0$, montrer que la matrice $B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice diagonale $D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$.

(c) Traiter le cas où $A \in GL_2(\mathbb{R})$.

(d) En déduire un représentant de chaque classe d'équivalence de matrices semblables de trace nulle.

(4) Soit $D \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Montrer que l'image de $M_2(\mathbb{R})$ par l'application $M_2(\mathbb{R}) \ni A \mapsto DA - AD$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ dont on précisera une base et sa dimension.

(5) (a) Montrer qu'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ est de trace nulle, si, et seulement si il existe deux matrices $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $A = XY - YX$.

(b) Donner une telle décomposition pour la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

(6) Soit $D \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Donner suivant la matrice D la dimension de l'image de $M_n(\mathbb{R})$ par l'application $M_n(\mathbb{R}) \ni A \mapsto DA - AD$. Reconnaitre cette image lorsque cette dimension est maximale et donner dans ce cas une base en fonction de D du noyau de l'application.

(7) On désigne par $\mathscr{E}_n$ le sous-espace de dimension maximale reconnu dans la question précédente.

(a) Montrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice $B = ((b_{ij}))$ telle que $b_{nn} = 0$.

(b) Montrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à un élément de $\mathscr{E}_n$ (on peut faire une récurrence sur n).

(c) En déduire qu'une matrice est de trace nulle $A \in M_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe deux matrices $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A = XY - YX$.

(d) Peut-on imposer aux matrices X et Y d'être aussi de trace nulle ?

(8) A l'aide de la question (7-b), montrer que l'enveloppe convexe de $\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$ (c'est l'intersection de tous les convexes contenant $\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$ ou encore le plus petit convexe contenant $\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$) est $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$.

On désigne par $\mathscr{F}_3$ le sous ensemble des matrices $A = ((a_{ij})) \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $a_{13} = 0$ et $a_{12} + a_{23} = 0$.

(9) Montrer que $\mathscr{F}_3$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$, en préciser une base et sa dimension.

(10) Montrer que toute matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ de rang 0,1 ou 2 est semblable à une matrice de $\mathscr{F}_3$.

(11) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, alors elle est semblable à une matrice $B \in \mathscr{F}_3$.

Troisième Partie

Dans cette troisième partie (indépendante de la seconde) on étudie les propriètés topologiques des classes de similitude.

(12) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, Montrer que $\mathscr{S}_A$ est borné si, et seulement si $A \neq \lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

(13) Montrer que $\mathscr{S}_A$ est d'interieur vide dans $M_n(\mathbb{C})$.

(14) Montrer que $\mathscr{S}_A$ est connexe par arc dans $M_n(\mathbb{C})$.

(15) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On va montrer ici que A est nilpotente si et seulement si $O_{M_n(\mathbb{C})} \in \overline{\mathscr{S}_A(\mathbb{C})}$ (autrement dit : ssi il existe une suite $(B_k)_k \subset \mathscr{S}_A$ qui converge vers la matrice nulle $O_{M_n(\mathbb{C})}$).

(a) Si A est nilpotente, on pose pour tout entier $q \geq 1$: $D_q := \text{diag}(q^n, q^{n-1}, \ldots, q^2, q) \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire $T = ((t_{ij}))$ à éléments diagonaux nuls telle que la suite $(D_q^{-1} T D_q)_q$ réponde à la question.

(b) Réciproquement, si $O_{M_n(\mathbb{C})} \in \overline{\mathscr{S}_A(\mathbb{C})}$, montrer que A est nilpotente.

(16) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On va montrer que

$$A \text{ est diagonalisable } \iff \overline{\mathscr{S}_A(\mathbb{C})} \text{ est fermé dans } M_n(\mathbb{C}).$$

(a) Condition nécessaire : A est diagonalisable, on note π_A son polynôme minimal et soit $B \in \overline{\mathscr{S}_A(\mathbb{C})}$.

– Montrer que $\pi_A(M) = O_{M_n(\mathbb{C})}$ pour tout $M \in \mathscr{S}_A(\mathbb{C})$.

– Montrer que $\pi_A(B) = O_{M_n(\mathbb{C})}$.

– Montrer que B est diagonalisable.

– Montrer que A et B ont mêmes polynômes caractéristiques.

– Conclure.

(b) Condition suffisante : par contraposée on suppose A non diagonalisable. On admet (décomposition de Dunford) que A s'écrit $A = D + N$ où $ND = DN$, D est diagonale et N nilpotente. A une conjugaison près on suppose que que $D = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \ldots, \lambda_r I_{n_r})$ avec $n_1 + \cdots + n_r = n$. En s'inspirant de la question (16-a) montrer que $D \in \overline{\mathscr{S}_A(\mathbb{C})}$ et conclure.

Fin de l'épreuve.

Corrigé

Solution :

(1) (a) Si F n'est pas d'intérieur vide, il existe $\in F$, $r > 0$ tels que $B(a,r) \subset F$. F étant un sous-espace vectoriel, on a encore $B(a,r) \setminus \{a\} = B(O_E, r) \subset F$. Maintenant, soit $x \in E$ non nul, on vérifie sans peine que $\frac{xr}{2\|x\|} \in B(O_E, r) \subset F$. Encore une fois, F étant un sous-espace vectoriel : $x = \frac{xr}{2\|x\|} \cdot \frac{2\|x\|}{r} \in F$ et finalement $F = E$.

(b) Consultez votre livre d'exo favori (cette propriété est (comme dans ce problème) souvent fondamentale.

(2) (a) Classique.

(b) La trace est une forme linéaire non nulle sur $M_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$ est son noyau : c'est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$, donc un sous-espace de dimension $n^2 - 1$. Une base est donné par la famille

$$\mathscr{B} = \{E_{ij},\ E_{11} - E_{kk} \ \text{ où } \ 1 \leq i \neq j \leq n,\ 2 \leq k \leq n\}.$$

Donc l'orthogonal $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})^\perp$ est un sous-espace de dimension 1, comme il est clair que $I_n \in \mathscr{T}_n(\mathbb{R})^\perp$ son supplémentaire orthogonal est $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathbb{R}I_n$.

(c) • Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, tous les sous-espaces sont fermés. Plus directement, $\mathscr{T}_n(\mathbb{R}) = \text{trace}^{-1}(\{0\}$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue (en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues).

• Avec (1-a), le sous-espace strict $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$ est d'intérieur vide dans $M_n(\mathbb{R})$.

(d) L'hypothèse $\text{trace}(AX) = 0$ pour toute matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle s'écrit $\langle A, X\rangle = 0$ pour tout $X \in \mathscr{T}_n(\mathbb{R})$, autrement dit $A \in \mathscr{T}_n(\mathbb{R})^\perp$ i.e. $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et la réciproque est évidente.

(e)

(f)

(g) Sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractérique de A est scindé. Raisonnons par l'absurde en supposant A non nilpotente. Alors A possède au moins des valeurs propres non nulles que l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r,\ 1 \leq r \leq n$ de multiplicités respectives $n_1, \dots, n_r$. Par hypothèse nous avons pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$:

$$\mathrm{tr(A^k) = n_1\lambda_1^k + \cdots + n_r\lambda_r^k}.$$

Écrire ces relations pour k variant de 1 à r équivaut à dire que le vecteur $(n_1, \dots, n_r)$ est solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \dots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{pmatrix} = 0.$$

Et ce système est de Cramer puisque le déterminant de la matrice du système vaut [1]

$$\lambda_1 \dots \lambda_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_i - \lambda_j)$$

donc nécessairement $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 0$ ce qui est exclu.

(h)

1. C'est le trés fameux déterminant de Vandermonde : [?], exercice 1.8.

(i)

(3) (a) Notons $\mathrm{spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, alors $\mathrm{trace}(A) = 0$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et A est nilpotente : $A^2 = 0$ en particulier $\dim\ker(A) \geq 1$.

• Si $\dim\ker(A) = 2$ alors $A = O_{M_2(\mathbb{R})}$ et il n'y a rien à démontrer.

• Si $\dim\ker(A) = 1$ alors A est de rang 1. Il existe $e \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(e)$, et $e_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $e = Ae_1$. La famille $\{e_1, Ae_1\}$ est libre, en effet en composant par A l'égalité $\alpha e_1 + \beta Ae_1 = 0$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ on tire (car $A^2 = O$) $\alpha Ae_1 = \alpha e = 0$ qui assure $\alpha = 0$ car e n'est pas le vecteur nul ; $\beta = 0$ en résulte aussitôt et $\{e_1, Ae_1\}$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$. Dans la base $\{e_1, Ae_1\}$ la matrice A s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: A est donc bien semblable à une matrice à éléments diagonaux nuls.

(b) $P_{B_\lambda}(x) = x^2 - \lambda^2$, donc $\mathrm{spec}(B_\lambda) = \{\lambda, -\lambda\}$ où $\lambda \neq 0$. Les valeurs propres de B_λ sont deux à deux distinctes et B_λ est diagonalisable : il existe donc $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $B_\lambda = Q^{-1}D_\lambda Q$.

(c) Si A n'est pas inversible, alors $\mathrm{spec}(A) = \{\lambda, -\lambda\}$ avec $\lambda \neq 0$. Les valeurs propres de A sont deux à deux distinctes et A est diagonalisable : il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $A = P^{-1}D_\lambda P$. diagonalisable. Comme (1-b), $D_\lambda = QB_\lambda Q^{-1}$ on aura $A = P^{-1}D_\lambda P = P^{-1}QB_\lambda Q^{-1}P = (Q^{-1}P)^{-1}B_\lambda Q^{-1}P = R^{-1}B_\lambda R$ et A est semblable à la matrice B_λ à éléments diagonaux nuls.

(d) En résumé, des représentants des différentes classes d'équivalence des matrices de trace nulle sont

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}^\star.$$

(4) L'application $\varphi_D(A) = DA - AD$ est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ et comme l'ensemble $\mathscr{T}_2$ des matrices de trace nulle est trivialement (c'est le noyau de la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{trace}(A)$) un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$, son image $\varphi_D(\mathscr{T}_2)$ en sera encore un.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ un calcul élémentaire donne :

$$DA - AD = \begin{pmatrix} 0 & c(\lambda_1 - \lambda_2) \\ b(\lambda_2 - \lambda_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

• Si $\lambda_1 = \lambda_2$ alors $DA - AD = O_{M_2(\mathbb{R})}$ pour toute matrice A de trace nulle et $\varphi_D(\mathscr{T}_2) = \{O_{M_2(\mathbb{R})}\}$.

• $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $DA - AD = \alpha E_{21} + \beta E_{12}, (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ (car les paramètres b et c sont quelconques et $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$) et $\varphi_D(\mathscr{T}_2)$ est le sous-espace de dimension 2 : $\varphi_D(\mathscr{T}_2) = \mathrm{Vect}\{E_{21}, E_{12}\}$.

(5) • La linéarité de la trace et la formule bien connue $\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$ assurent que toute matrice A s'écrivant $A = XY - YX$ est de trace nulle. La condition est suffisante.

• Pour la condition nécessaire, si A est de trace nulle, avec (1), elle est semblable à une matrice U dont tous les éléments diagonaux sont nuls, donc dans $\mathrm{Vect}\{E_{21}, E_{12}\}$; mais, vu (2), $\varphi_D(\mathscr{T}_2) = \mathrm{Vect}\{E_{21}, E_{12}\}$ et U s'écrit sous la forme $U = DB - BD$ où D est diagonale et B de trace nulle. Ainsi

$$A = P^{-1}(DB-BD)P = P^{-1}DBP-P^{-1}BDP = (P^{-1}DP)(P^{-1}BP)-(P^{-1}BP)(P^{-1}DP) = XY-YX,$$

avec $X = P^{-1}DP$ et $Y = P^{-1}BP$. CQFD.

(6) Notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $A = ((a_{ij}))$, un petit calcul nous donne

$$DA - AD = ((a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) := d_{ij})) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}.$$

Par conséquent tout les éléments diagonaux d_{ii} de $AD-DA$ sont déjà nuls et, si D admet deux valeurs propres identiques, disons λ_{j_0} et λ_{i_0} les coefficients $d_{i_0j_0}$ et $d_{j_0i_0}$ seront aussi nuls. Les coefficients a_{ij} étant arbitraires, plus précisément :

Le polynôme caractéristique de D est de la forme :

$$P_D(x) = (-1)^n (x-\alpha_1)^{d_1} \dots (x-\alpha_s)^{d_s}$$

où $1 \leq s \leq n$, $\alpha_1, \dots \alpha_s$ sont les valeurs propres deux a deux distinctes de D et $d_1 + \cdots + d_s = n$. Une valeur propre α_i est de multiplicité d_i, autrement dit on a d_i coefficient λ_i égaux ce qui fait d_i^2 des coefficients $d_{kl} = a_{kl}(\lambda_k - \lambda_l)$ de la matrice $DA - AD$ seront nuls. On aura donc $d_1^2 + \cdots + d_s^2$ coefficients toujours nuls et le sous-espace $\{DA - AD,\ A \in M_n(\mathbb{R})\}$ sera de dimension

$$n^2 - (d_1^2 + \cdots + d_s^2) = (d_1 + \cdots + d_s)^2 - (d_1^2 + \cdots + d_s^2) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq s} d_i d_j.$$

– Par exemple si le polynôme caractéristique de D est $P_D(x) = (x-1)(x-2)^4(x-3)^5$, le sous-espace $\{DA - AD,\ A \in M_{10}(\mathbb{R})\}$ sera de dimension $10^2 - 1 - 4^2 - 5^2 = 100 - 42 = 58$.

– En particulier, si les valeurs propres de D sont deux à deux distinctes, alors $s = n$ et $d_i = 1$, $(1 \leq i \leq n)$. Dans ce cas le sous-espace $\{DA - AD,\ A \in M_n(\mathbb{R})\}$ et de dimension $n^2 - (d_1^2 + \cdots + d_s^2) = n^2 - n$ qui est maximale car $d_1^2 + \cdots + d_s^2$ est toujours supérieur à $d_1 + \cdots + d_s = n$. C'est le sous-espace des matrices à coefficients diagonaux nuls, il admet pour base les matrices E_{ij} avec $1 \leq i \neq j \leq n$ de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

(7) (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.

• Si $\ker(A)$ est de dimension supérieure ou égale à 1, on choisit un vecteur non nul $e \in \ker(A)$ et on complète pour obtenir une base $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e\}$ de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice A a sa dernière colonne nulle : A est donc semblable à une matrice du type désiré.

• Il reste à considérer le cas $\ker(A) = \{O\}$. A est alors inversible. Si A est une homothétie, alors $A = O$ car A est de trace nulle et ce cas est traité au dessus. Sinon (exercice classique) il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que les vecteurs x, Ax soient libres. On complète alors en une base $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_{n_2}, Ax, x\}$ de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base la dernière colonne de la matrice A est ${}^t(0, \dots, 0, 1, 0)$ et son coefficient (n, n) est bien nul. CQFD.

• On peut observer que le seul moment où on a utilisé la propriété « A est de trace nulle » est dans le cas où A est inversible pour éliminer les homothéties qui ne peuvent bien entendu pas être semblable à une matrice où $b_{nn} = 0$. La propriété démontrée est donc vraie pour toutes les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sauf les homothéties.

(b) La propriété à démontrer est triviale pour $n = 1$ et démontrée dans la première partie pour $n = 2$. On procède par récurrence sur $n \geq 2$, on suppose la propriété vraie au rang $n - 1$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Avec (5-a) A est semblable à une matrice $B = ((b_{ij}))$ où $b_{nn} = 0$: il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P^{-1}BP \quad \text{avec} \quad B = \left(\begin{array}{c|c} C & c_{n-1} \\ \hline l_{n-1} & 0 \end{array}\right),$$

où $C \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ et ${}^t l_{n-1}, c_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Comme $\mathrm{trace}(A) = 0 = \mathrm{trace}(B) = \mathrm{trace}$, $C \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ est de trace nulle : on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe une matrice $M \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls et $R \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ telles que $M = R^{-1}CR$. Maintenant si je pose

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} R & 0_{n-1} \\ \hline {}^t0_{n-1} & 1 \end{array}\right)$$

(où 0_{n-1} est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$) alors

$$\det(Q) = \det(R) \neq 0, \quad \text{donc} \quad Q \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } \quad Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0_{n-1} \\ \hline 0_{n-1} & 1 \end{array}\right)$$

un calcul élémentaire donne alors

$$Q^{-1}BQ = \left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0_{n-1} \\ \hline 0_{n-1} & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C & c_{n-1} \\ \hline {}^t l_{n-1} & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} R & 0_{n-1} \\ \hline 0_{n-1} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R^{-1}CR & c'_{n-1} \\ \hline {}^t l'_{n-1} & d_n \end{array}\right)$$

où ${}^t l'_{n-1}, c'_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ sont deux vecteurs et $d_n \in \mathbb{R}$. Il reste à observer que $d_n = 0$ puisque C et B sont de trace nulle et finalement B qui est semblable à

$$T := Q^{-1}BQ = \left(\begin{array}{c|c} M & c'_{n-1} \\ \hline {}^t l'_{n-1} & 0 \end{array}\right)$$

est à diagonale nulle. A étant semblable à B est semblable à T de diagonale nulle. CQFD.

(c) Toute matrice A de trace nulle est (c'est la question précédente) semblable à une matrice B à éléments diagonaux nuls (c'est la question (6)). Toujours avec (6), $B \in \mathscr{E}_n$ s'écrit $B = CD - DC$ où D est diagonale à éléments diagonaux deux à deux distincs. Donc

$$A = P^{-1}BP = P^{-1}(CD - DC)P = (P^{-1}CP)(P^{-1}DP) - (P^{-1}DP)(P^{-1}CP) = XY - YX$$

avec $X = P^{-1}CP$ et $Y = P^{-1}DP$.

(d) Si dans la question précédente X et Y ne sont pas de trace nulle, on les remplace respectivement par $X - \mathrm{tr}(X/n)I_n$ et $Y - \mathrm{tr}(Y/n)I_n$ qui sont de trace nulle, alors après simplification

$$(X - \mathrm{tr}(X/n)I_n)(Y - \mathrm{tr}(Y/n)I_n) - (Y - \mathrm{tr}(Y/n)I_n)(X - \mathrm{tr}(X/n)I_n) = XY - YX = A.$$

(8)

(9) On a

$$\mathscr{F}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ c & d & -a \\ e & f & g \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{K} \right\}.$$

c'est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{K})$ de dimension 7, plus précisément

$$\mathscr{F}_3 = \mathrm{Vect}\{E_{11}, E_{21}, E_{31}, E_{22}, E_{32}, E_{33}, E_{12} - E_{23}\}.$$

(10) Si A est de rang 0,1 ou 2, alors 0 est valeur propre de A et le spectre de A est de l'une des formes suivantes : $\{0\}$, $\{0, \lambda\}$ ou $\{0, \lambda, \mu\}$ avec $\lambda \neq \mu$ non nuls.

• Si $\mathrm{spec}(A) = \{0, \lambda, \mu\}$, les valeurs propres de A sont deux à deux distinctes : A est diagonalisable :

$$\exists\, P \in GL_3(\mathbb{K}) \;:\quad A = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathscr{F}_3.$$

• Si $\mathrm{spec}(A) = \{0, \lambda\}$ (i.e. $P_A(x) = -x(x-\lambda)^2$ ou $P_A(x) = -x^2(x-\lambda)^2$) on choisit $e_3 \in Ker(A)$ et $e_2 \in \ker(A - \lambda I_3)$ (qui sont au moins de dimension 1). Les espaces propres $Ker(A)$ et $\ker(A - \lambda I_3)$ sont en somme directe (c'est le cours) donc la paire

e_2, e_3 est libre ; on la complète alors en $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Dans la base $\mathscr{B}$ la matrice A s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \lambda & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{F}_3,$$

ce qu'il fallait démontrer.

• Si $\mathrm{spec}(A) = \{0\}$, A est un endomorphisme nilpotent : $A^3 = O$ et $P_A(x) = -x^3$.

– Si $\dim \ker(A) = 3$, alors $A = O \in \mathscr{F}_3$.

– Si $\dim \ker(A) = 2$, on complète une base $\{e_2, e_3\}$ de $\ker(A)$ en $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base $\mathscr{B}$, la matrice A s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{F}_3,$$

ce qu'il fallait démontrer.

– Enfin, il reste à considérer le cas où $\dim \ker(A) = 1$. Dans ce dernier cas $A^2 \neq O$, i.e., il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $A^2 x \neq 0$. En effet sinon $A^2 x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ qui implique que $\mathrm{Im}(A) \subset \ker(A)$, une inclusion absurde car $\dim \ker(A) = 1 < 2 = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Soit donc un tel x, on vérifie sans peine que la famille $\mathscr{B} = \{x, Ax, A^2 x\}$ est libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base $\mathscr{B}$ la matrice A s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{F}_3,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(11)

(12) Si A admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $A - \lambda I_n$ est de rang < 3, elle est donc (c'est la question 7) semblable à un matrice $B \in \mathscr{F}_3$: $A - \lambda I_3 = P^{-1} B P$ où $P \in GL_3(\mathbb{K})$. Donc $A = P^{-1}(B + \lambda I_3) P$ et A est semblable à $B + \lambda I_3$ qui appartient à $\mathscr{F}_3$ puisque B et λI_3 le sont et que $\mathscr{F}_3$ est un sev de $M_3(\mathbb{R})$.

Troisième Partie

(13) Si $A = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $\mathscr{S}_A = \{A\}$ qui est bien bornée. Maintenant, si A n'est pas une matrice scalaire l'endomorphisme f canoniquement associé à A n'est pas une homothétie et la question (2) assure l'existence d'un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ tel que la famille $\{v, f(v) = Av\}$ soit libre. Considérons alors la base $\mathscr{B}_\lambda := \{v, \lambda Av, e_3, \cdots, e_n\}$ où $\lambda > 0$ et soit $A_\lambda \in \mathscr{A}$ la matrice de A dans cette base. En observant la première colonne de A_λ il vient $\|A_\lambda\|_\infty \geq \lambda^{-1} \longrightarrow +\infty$ lorsque λ tends vers 0 et $\mathscr{S}_A$ n'est pas bornée [2] dans $M_n(\mathbb{C})$.

(14) $\mathscr{S}_A(\mathbb{K}) \subset \mathscr{T}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{trace}(A)$ qui est vu (2-d) (le translaté d'un hyperplan est un hyperplan affine et donc toujours d'intérieur vide) d'intérieur vide, donc $\mathscr{S}_A(\mathbb{K})$ est aussi d'intérieur vide.

(15)

(16) (a) Si A est nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire $T = ((t_{ij}))$ stricte (i.e. $t_{ij} = 0$ pour $i \geq j$). Il est bien entendu suffisant de prouver le résultat pour T. Pour tout $q \in \mathbb{N}$ soit $D(q) = \mathrm{diag}(q^n, q^{n-1}, \ldots, q^2, q)$ et notons

$$D(q)^{-1} T D(q) = ((u_{ij})), \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

2. Qu'importe la norme, elles sont toutes équivalentes...

on a alors

$$\begin{cases} u_{ij} & = q^{i-j}t_{ij}, \forall\, n \geq j > i \geq 1 \\ u_{ij} & = 0, \quad \text{si } i \geq j \end{cases}$$

Donc, si $\alpha := \max\{\, |t_{ij}|,\ 1 \leq i,j \leq n\}$ on a aussitot

$$|u_{ij}| \leq \frac{\alpha}{q}, \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

et par suite $\lim_q D(q)^{-1}TD(q) = O_{M_n(\mathbb{R})}$. D'où le résultat.

(b) Réciproquement soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$.Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de A on a (classiquement) :

$$|\lambda| \leq |||A|||.$$

Si bien que s'il existe une suite $(B_k)_k$ de matrices semblables à A et de limite nulle, les matrices A et B_k ayant même spectre on démontre sans peine que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad |\lambda| < \varepsilon, \quad \forall\, \lambda \in \operatorname{spec}(A),$$

i.e. $\operatorname{spec}(A) = \{0\}$ et A est nilpotente.

(17) (a) (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale et $B \in \overline{\mathscr{S}_A}$. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et est annulé par A, ie $\pi_A(A) = O$. En outre, $M \in \mathscr{S}_A \;\Rightarrow\; \forall\, k \in \mathbb{N} \;:\; M^k = PA^kP^{-1} \;\Rightarrow\; \pi_A(M) = P \cdot \pi_A(A) \cdot P^{-1} = O$. Ainsi

$$\pi_A(M) = O, \quad \forall\, M \in \mathscr{S}_A$$

et par continuité[3] de $M \mapsto \pi_A(M)$

$$\pi_A(M) = O, \quad \forall\, M \in \overline{\mathscr{S}_A},$$

ainsi $\pi_A(B) = O$: la matrice $B \in \overline{\mathscr{S}_A}$ est donc annulée par un polynôme scindé à racine simples et est donc diagonalisable. Pour s'assurer que $B \in \mathscr{S}_A$, il est maintenant suffisant de montrer que les matrices A et B ont mêmes valeurs propres et mêmes dimension de sous espaces propres.

Soient $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$, $E_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n \;:\; Ax = \lambda x\}$ le sous-espace propre associé et $F_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n \;:\; Bx = \lambda x\}$ et posons $n_\lambda = \dim E_\lambda,\ m_\lambda = \dim F_\lambda$. Soit $M \in \mathscr{S}_A$, M étant semblable à A : $\operatorname{rang}(M - \lambda I_n) = n - n_\lambda$ qui implique que les mineurs d'ordre $n - n_\lambda + 1$ de $M - \lambda I_n$ sont nuls. Ces mineurs dépendant polynomialement et donc continuement des coefficients, les mineurs d'ordre $n - n_\lambda + 1$ de B sont aussi nuls, soit :

$$n - m_\lambda = \operatorname{rang}(B - \lambda I_n) \leq n - n_\lambda$$

i.e.

$$m_\lambda \geq n_\lambda, \quad \forall \lambda \in \operatorname{spec}(A).$$

En outre B étant diagonalisable

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{C}} m_\lambda = n = \sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} n_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} m_\lambda$$

qui implique $n_\lambda = m_\lambda,\ \forall\, \lambda \in \operatorname{spec}(A)$ qui assure à son tour que B est semblable à A : $B \in \mathscr{S}_A$ soit $\mathscr{S}_A = \overline{\mathscr{S}_A}$.

3. Attention ! par contre l'application $A \mapsto \pi_A$ n'est pas continue, on deux trouvera deux preuves dans ce document.

(b) (ii) $\Leftarrow$ (i). Supposons maintenant par contraposée A non diagonalisable. On peut écrire A sous la forme $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente non nulle et $ND = DN$. À conjugaison prés, on peut supposer

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_k I_{m_k})$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ étant les valeurs propres distinctes de A, $m_1, \dots, m_k$ leur multiplicité. Comme $ND = DN$, N est de la forme

$$N = \mathrm{diag}(N_1, \dots, N_k), \quad N_i \in M_{m_i}(\mathbb{C}),\ 1 \leq i \leq k,$$

et en effectuant les produits par blocs dans $ND = DN$ on voit que l'on peut [4] supposer les N_i triangulaires supérieures strictes. Alors, comme dans la preuve de la première question

$$D(q)^{-1}DD(q)) = D \quad \text{et} \quad \lim_q D(q)^{-1}ND(q)) = 0$$

qui implique

$$D = \lim_q D(q)^{-1}(D+N)D(q) = \lim_q D(q)^{-1}AD(q)$$

i.e. $D \in \overline{\mathscr{S}_A}$. D'un l'autre coté $D \notin \mathscr{S}_A$ puisque A n'est pas diagonalisable : $\mathscr{S}_A \neq \overline{\mathscr{S}_A}$ et la seconde implication est démontrée.

🛈 **Remarques :** ➪ Dans la solution de la question précédente il est démontré que pour toute matrice $A = D+N \in M_n(\mathbb{C})$ (décomposition de Dunford), la matrice diagonale D est toujours dans $\overline{\mathscr{S}_A}$.

➪ Suivant Francinou Gianella &...[?] on peut simplifier la preuve (i)$\Rightarrow$(ii) de la manière suivante : soient A diagonalisable, $B \in \overline{\mathscr{S}_A}$, avec $B = \lim_k A_k$ où $(A_k)_k \subset \mathscr{S}_A$. $A_k \in \mathscr{S}_A$ implique $\chi_A = \chi_{A_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et par continuité de l'application $M \mapsto \chi_M$ il vient

$$\chi_B = \lim_k \chi_{A_k} = \chi_A.$$

Mais aussi, comme nous l'avons remarqué plus haut $\pi_A(B) = O$: la matrice B annulée par un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable. Les matrices A et B ont donc mêmes valeurs propres (comptées avec leur multiplicités) et sont diagonalisables : elles sont semblables et $B \in \mathscr{S}_A$.

18 décembre 2012 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

4. Choisir une base adaptée à la décomposition précédente dans laquelle chaque matrice N_i est triangulaire, la matrice D reste inchangée vu sa forme et le choix de la nouvelle base.