☯ **AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES** ☯

**Théorèmes de convergence, intégrales à paramètres – Samedi 13 Octobre 2012.**

## 1. Des exercices

**Exercice 1.** *Soient* $p, q \in \mathbb{R}_+^\star$, *montrer que* $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{nq+p}$. *Observez quelques cas particuliers :* $(p,q) = (1,1), (1,2), (2,2)...$

**Exercice 2.** *A l'aide de la fonction* $\varphi(x) := \int_0^1 \frac{t-1}{\log(t)} t^x dt$, *montrer que* $\int_0^1 \frac{t-1}{\log(t)}dt = \log(2)$.

**Exercice 3.** *Calculer la somme de la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

(1) *En remarquant que* $\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}dt$.

(2) *A l'aide de la fonction* $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

**Exercice 4.** *Soit* $P(x) = 6+4x+3x^2+8x^3+3x^4+4x^5+6x^6 \in \mathbb{R}[x]$, *on pose pour* $x \in [0,5[$ *:* $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{P(t)}dt$. *En quels point de* $[0,5[$, $g$ *atteint-elle sa borne inférieure ? Que dire de sa borne supérieure ?*

**Exercice 5.** *Domaine de définition, puis calcul de* $F(x) = \int_0^\infty \frac{arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt$.

**Exercice 6.** *Montrer que* $\int_0^\infty \frac{x}{ch(x)}dx = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

**Exercice 7.** *Convergence et calcul de* $\int_0^\infty \frac{\log(t)}{1-t^2}dt$.

**Exercice 8.** *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$ *:* $a_n = \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^n}dx$.

(1) *Déterminer la limite* $l$ *de la suite* $(a_n)_n$.

(2) *Déterminer un équivalent de* $a_n - l$.

(3) *Montrer que* $u_n = l + \frac{a}{n} + \frac{J}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *où l'on exprimera* $J$ *sous forme d'une intégrale.*

**Exercice 9.** *Domaine de définition, continuité et dérivabilité de* $f(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t+t^x}$, *limites aux bornes du domaine.*

**Exercice 10.** *Domaine de définition, continuité et dérivabilité de* $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+t^2}}dt$. *Préciser les équivalents et limites de* $f$ *aux bornes du domaine.*

**Exercice 11.** *Etudier sur son domaine de définition la fonction définie par* $f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx}\log(t)dt$. *Trouver une équation différentielle vérifiée par* $f$. *En déduire la forme explicite de* $f$.

**Exercice 12.** *Etudier sur son domaine de définition la fonction définie par* $f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\cos(xt)}{t^2+1}dt$. *Trouver une équation différentielle vérifiée par* $f$. *En déduire la forme explicite de* $f$.

**Exercice 13.** *Soit* $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2+t}}dt$.

(1) *Etudier* $f$ *(domaine, continuité, dérivabilité).*

(2) *Montrer que* $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

(3) *Montrer que* $f(x) \underset{0_+}{\sim} -\log(x)$.

**Exercice 14.** *On pose* $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t)dt$.

(1) *Etudier* $f$ *(domaine, continuité, dérivabilité).*

(2) *Montrer que* $f(x) \underset{-1}{\sim} \frac{1}{x+1}$.

(3) *Montrer que* $(x+1)f(x)f(x+1) = \pi/2$ *pour tout* $x > -1$.

(4) *En déduire un équivalent de* $f$ *en* $+\infty$ *et esquisser le graphe de* $f$ *sur son domaine.*

**Exercice 15.** *Pour* $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ *on pose* $a_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{nf(t)}{1+n^2t^2}dt$. *Aprés avoir justifié la définition de* $a_n$, *montrer que la suite* $a_n$ *converge et préciser sa limite.*

**Exercice 16.** *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $x \in \mathbb{R}_+^\star$ : $f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n}(1+x/n)^n}$.

(1) *Montrer que l'intégrale impropre* $I_n := \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt$ *converge si et seulement si* $n \geq 2$.

(2) *Montrer que pour tout* $x \geq 1$ *et* $n \geq 2$ : $|f_n(x)| \leq 4/x^2$.

(3) *Montrer que la suite* $(I_n)_2^\infty$ *converge et préciser sa limite.*

On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \int_1^\infty e^{-t^n}dt$. Après avoir justifié la définition de $a_n$, montrer que la suite $a_n$ converge, préciser sa limite et donner un équivalent de $a_n$.

**Exercice 17.** *Soit* $f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2xt)dt$. *Montrer que* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe une suite* $(a_n)_n$ *de réels telle que* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 18.** *(un lemme de Cantor) Soit pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, $x \in [0,1]$ : $g_n(x) = \sin(nx)$ *Montrer que la suite* $(g_n)_n$ *n'admet aucune sous-suite simplement convergente vers* $0$ *sur* $[0,1]$.

**Exercice 19.** *Montrer que :* $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} = \int_0^1 x^x dx, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x}dx,$.

**Exercice 20.** *Soit* $f(x) = \int_0^\infty e^{-u}\frac{\sin(xu)}{u}du$.

(1) *Montrer que* $f$ *est indéfiniment dérivable sur son domaine définition.*

(2) *Montrer que sur* $]-1,1[$ *on a un développement sous la forme* $f(x) = \sum_n a_n x^n$.

(3) *En déduire* $f$ *sur* $]-1,1[$. *Montrer que cette expression subsiste sur tout* $\mathbb{R}$.

**Exercice 21.** *Calcul de* ***l'intégrale de Dirichlet*** $\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt$. *On considère les applications* $f(x) := \int_0^\infty \dfrac{sin(t)}{t+x}dt$, $g(x) := \int_0^\infty \dfrac{e^{-tx}}{t^2+1}dt$.

(1) *Montrer que* $f$ *et* $g$ *sont de classe* $C^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^\star$.

(2) *Montrer que* $f$ *et* $g$ *sont solutions de l'équation différentielle* $y'' + y = \frac{1}{x}$.

(3) *Montrer que* $f - g$ *est* $2\pi$*-périodique.*

(4) *Montrer que* $f$ *et* $g$ *sont équivalentes à* $\frac{1}{x}$ *en* $+\infty$ *puis que* $f = g$.

(5) *En déduire que* $\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 22.** *Calcul de* ***l'intégrale de Gauss*** $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$. *Soient* $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *les fonctions définies par* $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}dt$ *et* $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$.

(1) *Montrer que* $f$ *et* $g$ *sont de classe* $C^1$. *Donner une expression de* $f'$ *et de* $g'$.

(2) *Calculer* $f(0)$.

(3) *Montrer que* $f' = -(g^2)'$.

(4) *Montrer que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. *Justifier votre réponse.*

(5) *Déduire de cette étude la valeur de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt$.

**Exercice 23.** $\mathscr{E}([a,b])$ *est l'ensemble des fonctions de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *nulles en dehors de* $[a,b]$.

(1) *Soit* $f \in \mathscr{E}([a,b])$, *montrer l'existence de* $\nu(f) = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx$.

(2) *Montrer qu'il existe deux constantes $\alpha, \beta$ ne dépendant que des réels $a$ et $b$ telles que $|\nu(f)| \leq \alpha\|f\| + \beta\|f'\|_\infty$ pour toute fonction $f \in \mathscr{E}([a,b])$.*

(3) *Peut-on choisir $\beta = 0$ ?*

**Exercice 24.** *Démontrer une partie du théorème d'inversion locale, à savoir : « soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $a \in \Omega$. Si la différentielle de $f$ en $a$ est un isomorphisme, alors il existe un voisinage $V$ de $a$ sur lequel $f$ est injective ». Sinon, considérer $x_n \neq y_n$ dans $\Omega \cap B(a, 1/n)$ tels que $f(x_n) = f(y_n)$ et les fonctions $g_n \ : \ [0,1] \ni t \mapsto df_{x_n + t(y_n - x_n)}(y_n - x_n)$...*

## 2. Deux Problèmes

**Problème 1. *Autour de la fonction Gamma :*** *Soit $f \ : \ (x,t) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \longmapsto f(x,t) := t^{x-1}e^{-t}$. Montrer que pour tout $x > 0$ la fonction$f(x, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On définit alors la fonction Gamma par*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

(1) *Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \left(\log(t)\right)^k t^{x-1}e^{-t}dt$.*

(2) *Etablir successivement $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, $\forall x > 0$ ; $\quad \Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.*

(3) *A l'aide de la formule $\ e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ et de la suite de fonctions de terme général $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \chi_{]0,n]}(t)$, $n \geq 1$, montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$ ($\gamma$ est la constante d'Euler).*

(4) *Aprés avoir établi pour $x > 0 \quad : \ \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$ montrer que $\Gamma'(n+1) = n!\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma\right)$, $n \geq 1$.*

(5) *Au moyen du changement de variables $s = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$, établir pour $x > 0$ : $\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)}ds$ où $\varphi(x,s) := x\log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}$*

(6) *Montrer que $\forall s \in ]-\sqrt{x}, 0] \ : \ \varphi(x,s) \leq -\frac{s^2}{2} \qquad$ et $\qquad \forall s \geq 0,\ x \geq 1 \ : \ \varphi(x,s) \leq \varphi(1,s)$.*

(7) *En déduire $\lim_{x\to+\infty}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)}ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}ds$ puis la formule de Stirling*

$$\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}.$$

(8) *Montrer que pour tout $x > 0$ : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \Gamma(x)$, et en déduire la formule de Gauss : $\forall\, x \in ]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.*

(9) *Puis celle de Weierstrass : $\forall\, x \in ]0, +\infty[, \quad \Gamma(x)^{-1} = xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n\left(1 + \frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}$.*

(10) *On note $\psi \ : ]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, l'application définie pour $x > 0$ par $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Démontrer que pour tout $x > 0 \ : \ \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + x\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x(x+n)}$, et en déduire que $\quad \Gamma'(1) = -\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x}\log(x)dx$.*

(11) *(Le théorème de Bohr-Mollerup) Montrer que $\log\Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^\star$. Réciproquement, soit $f \ : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ une application log-convexe vérifiant $f(1) = 1 \quad$ et $\quad \forall\, x > 0,\ f(x+1) = xf(x)$. ; montrer (à l'aide de la formule de Gauss) que $f = \Gamma$*

**Problème 2. *Développement en série entière à l'origine de la tangente :*** *) $z \in \mathbb{C}$ est de partie réelle $\sigma$ vérifiant $\mid \sigma \mid < 1$.*

(1) *Montrer que $f \ : \ t \in \mathbb{R}_+^\star \mapsto f(t) = \dfrac{\mathrm{sh}(zt)}{\mathrm{sh}(t)}$, $f(0) = z$, est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (et continue).*

(2) *Pour $t > 0$ développer $f$ en série d'exponentielles et appliquer la convergence dominée a la suite des sommes partielles pour établir*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{sh}(zt)}{\mathrm{sh}(t)} dt = \sum_{n\geq 0} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}$$

(3) *Sachant (exercice classique des séries de Fourier...) que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ on a $\pi co\tan(\pi z) = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}$ en déduire que pour $2z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{sh}(zt)}{\mathrm{sh}(t)} dt = \frac{\pi}{2} \tan(\frac{\pi z}{2}).$$

(4) *On rappelle que (d.s.e.) pour $| z |< 1$ et $t > 0$ : $f(t) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(zt)^{2n+1}}{(2n+1)!\mathrm{sh}(t)}$, montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{sh}(zt)}{\mathrm{sh}(t)} dt = 2 \sum_{n\geq 0} (1 - 2^{-2n-2}) \zeta(2n+2) z^{2n+1}.$$

*où $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$. En déduire que pour $| z |< 1$*

$$\frac{\pi}{2} \tan(\frac{\pi z}{2}) = 2 \sum_{n\geq 0} (1 - 2^{-2n-2}) \zeta(2n+2) z^{2n+1}.$$