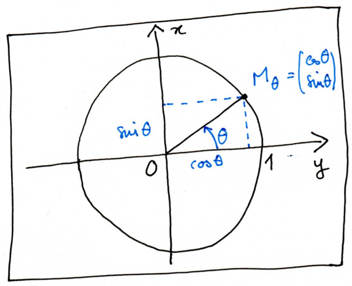
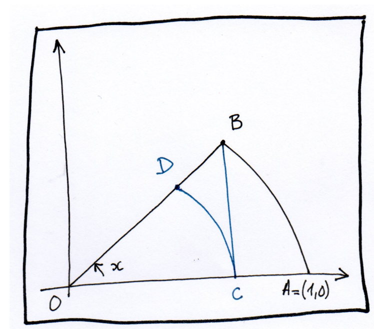
Exercice 1. *On définit pour $x \in \mathbb{R}$ la fonction sinus de manière trigonométrique (voir figure) but de cet exercice est de montrer « proprement » la formule classique $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ pour en déduire une démonstration « lycée » de la dérivée des fonctions trigonométriques.*





En observant bien la figure, montrer que

$$\frac{x\cos^2(x)}{2} \le \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} \le \frac{x}{2}, \quad \forall\, 0 < x < \pi/2.$$

(« rappel » : l'aire d'un secteur angulaire d'angle α et de rayon r est $\alpha r^2/2$) et conclure. En déduire la dérivée des fonctions sinus et cosinus.

Exercice 2. (1) *Calculer les limites suivantes, ou prouver quelles n'existent pas :*

$$\lim_{x\to 0} x\cos(1/x),\ \lim_{x\to 0} xE(1/x),\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos(x))}{\sin(\sin x)}, \lim_{x\to 0}\frac{E(x)}{x}, \lim_{x\to 0} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}\right).$$

(2) *Pour $a \in \mathbb{R}$ calculer $\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}$, puis $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$, $n \ge 4$.*

(3) *Calculer les limites suivantes : Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x\sin(\sin(x))}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin(\tan(\sin(x^2))))}{\sin(x^2)}, \quad \lim_{x\to 0_+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{\sin(x)}}$$

Exercice 3. *Pour $x \in \mathbb{R}$ on admet qu'il existe un unique entier relatif n vérifiant $n \le x \le n+1$. C'est la partie entière de x, on la note $E(x)$. Montrer que :*

- $x \le y \implies E(x) \le E(y)$.
- $E(x) + E(y) \le E(x+y) \le E(x) + E(y) + 1$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ x \in \mathbb{R}\ :\ E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.
- *Montrer que* $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star\ :\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1/2\sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. *En déduire la partie entière de* $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)$.

Exercice 4. *Calculer d'au moins quatre manières différentes le développement limité à l'ordre 3 à l'origine de la fonction tangente*

Exercice 5. *Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = \begin{cases} \frac{\exp((n+1)x)-1}{\exp x - 1}, & si\ \ x \in \mathbb{R}^\star, \\ n+1 & si\ \ x = 0. \end{cases}$

(1) *Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 3 à l'origine*

(2) *En déduire la valeur des sommes $\sum_{k=0}^{n} k^i$, $i = 0, 1, 2, 3$.*

Exercice 6. *Déterminer de trois manières différentes le développement limité à l'ordre deux de $f(x) = \arctan\sqrt{x}$ au point $x = 2$.*
f admet-elle un développement limité à l'origine ? si oui, quel est son ordre maximum ?

Exercice 7. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = xe^{x^2}$. *Montrer que* f *admet une application réciproque définie sur* $\mathbb{R}$ *et déterminer son développement limité à l'ordre 5 à l'origine.*

Exercice 8. *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\log(2)} - \frac{1}{2^x-1} & si \quad x \in \mathbb{R}^\star, \\ a & si \quad x = 0. \end{cases}$. *Comment choisir* $a \in \mathbb{R}$ *pour que*

(1) *Comment choisir* $a \in \mathbb{R}$ *pour que* f *soit continue à l'origine ?*

(2) f *ainsi prolongée est-elle dérivable à l'origine ?*

Exercice 9. *Utilisez Taylor-Lagrange pour donner une valeur approchée à* 10^{-8} *près de* $\log(1,003)$.

Exercice 10. *Quel est le développement limité à l'ordre 100 à l'origine de* $f(x) = \log\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 11. *Etudier et representer soigneusement* $f(x) = \log\left(2 - e^{-1/x}\right)$ *sur son domaine de définition.*

Exercice 12. *Soit* $f(x) = \frac{1}{1+2x+3x^2+...+2009x^{2010}}$, *que vaut* $f^{(2010)}(0)$ *? (commencez par écrire plus simplement* f *pour en déduire facilement un développement limité à l'ordre* 2010 *à l'origine...).*

Exercice 13. *Montrer que*

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}, \quad 2)\quad \lim_{x\to 2_+}\left(2^x + 3^x - 12\right)^{\tan(\pi x/4)} = \exp\left[-\frac{4}{\pi}\left(4\log(2) + 9\log(3)\right)\right],$$

$$3)\quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{\mathrm{t}^2+\mathrm{t}}) - \mathrm{sh}(\sqrt{\mathrm{t}^2-\mathrm{t}})}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t^2} - \frac{t^6}{6}\log^2(t)} = \frac{e-1}{2}, \quad 4)\quad \lim_{n\to+\infty}\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

$$5)\quad \lim_{x\to 5}(6-x)^{1/(x-5)} = e^{-1}, \quad 6)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\arctan\left(\frac{\mathrm{x}^2-1}{\mathrm{x}^2+1}\right)}{x-1} = 1,$$

$$7)\quad \lim_{x\to 0_+}\left(2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin(1/x)\right)^x = 1, \qquad 8)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} = -2,$$

$$9)\quad \lim_{x\to 0_+}\frac{x^x - (\sin x)^{\sin x}}{x^3} = -\infty, \quad 10)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\arctan^3(x)}\left(\log(\log(e+x)) - \frac{x}{x+e}\right) = \frac{1}{6e^3},$$

$$11)\quad \lim_{x\to e}\frac{e^x - x^e}{\log(x) - \log_x(e)} = 0, \quad 12)\quad \lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan(\mathrm{x}) - \frac{\pi\mathrm{x}+1}{2\mathrm{x}+1}\right) = \frac{\pi-6}{4},$$

$$13)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{1/\sin(x)} = 1, \quad 14)\quad \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - ex^3\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{e}{8},$$

$$15)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}\right)^x = \frac{2}{3}, \quad 16)\quad \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x} - \left(1+\frac{3}{x}\right)^{x/2}\right) = \frac{15e^{3/2}}{8},$$

$$17)\quad \lim_{x\to+\pi/2_+}\cos(x)\exp\frac{1}{1-\sin(x)} = -\infty,$$

$$11)\quad \lim_{x\to 1}\left(4\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) - x\right)^{1/(1-x)} = \exp(1-\pi/\sqrt{3}), \quad 18)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log(x+1)}{\log(x)}\right)^{x\log(x)} = e,$$

$$19)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{x})}{x}\right)^{\mathrm{argsh(x)/(sh(x)-x)}} = e, \quad 20)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+2x+2x^2)}{\log(1+2x+3x^2)}\right)^{1/(e^x-1)} = 1/\sqrt{e}.$$

`Principaux développements limités à connaitre parfaitement.`

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

16 septembre 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr