Exercice 1. ***Préciser si chacunes des propositions suivantes est vraie ou fausse puis, justifier votre réponse par une démonstration ou un contre exemple.***

(1) *Si A et B sont deux sous espaces vectoriels inclus dans un espace vectoriel E et vérifiant $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$, alors $A \cup B$ est encore un sous espace vectoriel de E.*

(2) *Une matrice A réelle 2×2 vérifiant $A^2 = O_2$ est nulle.*

(3) $\sup_{x\in\mathbb{R}}[\cos(x) + \sin(x)] = \sqrt{2}$.

(4) *Soit $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ dérivable. Si $f' \equiv 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}^\star$.*

(5) *Le développement limité de $f(x) = \sin(x)$ à l'ordre deux en $x = 2$ est $f(x) = sin(2) + \cos(2)(x-2) - \sin(2)(x-2)^2 + o((x-2)^2)$.*

(6) *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$ se prolonge continuement en $x = 1$.*

(7) *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $f(x) = \frac{1-x^n}{\sqrt{|1-x|}}$ se prolonge continuement en $x = 1$.*

(8) *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $f(x) = \frac{1-x^n}{(1-x)^2}$ se prolonge continuement en $x = 1$.*

(9) $\lim_{x\to\pi} \frac{\ln(-\cos(x))}{\sqrt{\pi}-\sqrt{x}} = 0$.

(10) *La famille $\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[x]$ espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2.*

Exercice 2.

(1) ***Préliminaires.***

(a) *Montrer que la fonction tangente réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est alors notée* $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$.

(b) *Montrer que* $\arctan$ *est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie* $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

(c) *Montrer que* $\arctan$ *admet un développement limité à tout ordre en $x = 0$ avec* $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

(d) *Représenter sommairement le graphe de* $\arctan$ *sur $\mathbb{R}$.*

(2) ***Première partie.*** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par* $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x)}{x}, & si\ \ x \neq 0, \\ 1, & si\ \ x = 0. \end{cases}$

(a) *Montrer que f est paire.*

(b) *Etudier la limite de f en $+\infty$.*

(c) (i) *Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.*

(ii) *Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^\star$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.*

(d) (i) *Pour tout réel x positif, on pose $N(x) = x - (1 + x^2)\arctan(x)$. Etudier les variations de la fonction N et préciser son signe sur $\mathbb{R}_+$.*

(ii) *En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.*

(e) *Tracer la représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées.*

(3) ***Seconde partie.*** *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par* $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, & si \;\; x \neq 0, \\ 1, & si \;\; x = 0. \end{cases}$

(4) *Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.*

(5) *Montrer que pour tout réel x : $f(x) \leq F(x) \leq 1$ (on pourra utiliser la question (d-ii) de la première partie.*

(6) (a) *Montrer que F est dérivable en 0 et préciser la valeur de $F'(0)$.*

(b) *Justifier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}^\star$ et montrer que pour tout réel x non nul : $F'(x) = \frac{f(x)-F(x)}{x}$.*

(c) *En déduire le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.*

(d) *Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt = 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.*

(7) *Tracer la représentation graphique de la fonction F dans le plan rapporté au même repère que celui utilisé pour tracer la représentation graphique de la fonction f.*

Troisième partie. *Dans cette partie, on s'intéresse à l'équation différentielle $(\mathscr{E}) \; : \; x^2y'+xy = \arctan(x)$. On note $(\mathscr{E}_0)$ l'équation différentielle associée : $(\mathscr{E}_0) \; : \; x^2y' + xy = 0$.*

(1) (a) *On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par* $g(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & si \;\; x > 0, \\ -\frac{1}{x}, & si \;\; x < 0. \end{cases}$ *La fonction g est-elle solution de $(\mathscr{E}_0)$ sur $\mathbb{R}^\star$?*

(b) *Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_0)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.*

(2) *A toute fonction y de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$, on associe la fonction u définie pour $x \neq 0$ par $u(x) := xy(x)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que y soit solution de $(\mathscr{E})$.*

(3) *En déduire sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.*

(4) *Montrer que la fonction F définie dans la seconde partie est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.*

Exercice 3. *L'objet de cet exercice est l'étude de l'évolution, au cours du temps, de l'utilisation de trois marques de dentifrice pour une population donnée de consommateurs.*

L'ensemble des couples de réels est noté $\mathbb{R}^2$. trois marques X, Y et Z d'un dentifrice occupent un secteur de consommation. Chaque mois, les consommateurs de la population étudiée utilisent une et une seule de ces marques.

Soit n un entier naturel. Pour un consommateur pris au hasard, on désigne par X_n (respectivement Y_n et Z_n) l'événement « la marque X (resp. Y et Z) est utilisée au cours du n-ième mois ». Les probabilités des événements X_n, Y_n et Z_n sont respectivement notés x_n, y_n et z_n. Au cours du mois d'essai ($n = 0$), on a observé les valeurs initiales $x_0 = 0,1, y_0 = 0,2$ et $z_0 = 0,7$. D'autre part, on a pu déterminer par sondage les intentions des consommateurs que l'on supposera constantes :

• *La probabilité pour un consommateur ayant utilisé la marque X au cours du mois n, d'adopter la marque X (resp. Y et Z) au cours du mois suivant est $0,4$ (resp. $0,3$ et $0,3$) ;*

• *La probabilité pour un consommateur ayant utilisé la marque Y au cours du mois n, d'adopter la marque X (resp. Y et Z) au cours du mois suivant est $0,3$ (resp. $0,4$ et $0,3$) ;*

• *La probabilité pour un consommateur ayant utilisé la marque Z au cours du mois n, d'adopter la marque X (resp. Y et Z) au cours du mois suivant est $0,2$ (resp. $0,1$ et $0,7$).*

(1) *Pour tout entier naturel n :*

(a) *Exprimer* x_{n+1}, y_{n+1} *et* z_{n+1} *en fonction de* x_n, y_n *et* z_n.

(b) *Vérifier que* $x_n + y_n + z_n = 1$.

(2) *On considère les matrices* $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$. *Montrer que pour tout entier naturel* n *on a* $U_{n+1} = AU_n + B$.

(3) *On désigne par* I *la matrice identité* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) *Montrer que* $I - A$ *est inversible.*

(b) *Déterminer une matrice* C *telle que* $C = AC + B$.

(4) *Montrer que pour tout entier naturel* n *pn pose* $V_n = U_n - C$. *Démontrer que pour tout entier naturel* n, $V_n = A^n V_0$.

(5) (a) *Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice* A, *ainsi que les sous-espaces propres associés respectivement à chacunes des valeurs propres.*

(b) *Préciser pourquoi* A *est diagonalisable et déterminer une base* $\mathscr{C}$ *constituée de vecteurs propres de* A.

(c) *Déterminer la matrice de passage* P *de la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *à la base* $\mathscr{C}$ *ainsi que son inverse* P^{-1}.

(d) *En déduire pour tout entier naturel* n *non nul, l'expression de la matrice* A^n. *Exprimer* x_n, y_n *et* z_n *en fonction de* $n/$

(6) *Que conclure de l'utilisation à long terme des marques* X, Y *et* Z *?*

 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

Exercice 4. (1) *C'est faux, par exemple considérer dans* $\mathbb{R}^2$ *les deux espaces vectoriels* $A = \{(a,0),\ a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(1,0)$ *et* $A = \{(0,a),\ a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(0,1)$. $A \cup B$ *n'est pas un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *: par exemple* $(1,1) = (1,0) + (0,1) \notin A \cup B$ *bien que* $(1,0) \in A$ *et* $(0,1) \in B$. *Plus généralement, la réunion de deux sous espaces vectoriels n'est un sous espace vectoriel si et seulement si l'un des deux sous espacces est inclus dans l'autre.*

(2) *Faux, elle est seulement nilpotente ; par exemple* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *convient.*

(3) *Comme* $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}[\sqrt{2}\cos(x)/2 + \sqrt{2}\sin(x)/2] = \sqrt{2}\cos(x - \pi/2) = \sqrt{2}\sin(x)$*, on en déduit aussitôt que* $\sup_{x\in\mathbb{R}}[\cos(x) + \sin(x)] = \sqrt{2}$.

(4) *C'est faux, par exemple considérer* $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 1/x$. *Ce genre d'argument ne marche que sur un intervalle.*

(5) *Non le troisième terme est* $\sin(2)(x-2)^2/2$.

(6) *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Classiquement pour* $x \neq 1$ *:* $f(x) = \frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} \to n$ *se prolonge continuement en* $x = 1$ *en posant* $f(1) = n$.

(7) *Vu ce qui précède* $f(x) = \frac{1-x^n}{\sqrt{|1-x|}} \sim_1 n\sqrt{x-1}$ *se prolonge continuement en* $x = 1$ *en posant* $f(1) = 0$.

(8) *Comme précédemment* $f(x) = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} \sim_1 \frac{n}{x-1}$ *et cette fois se prolonge continu en* $x = 1$ *est impossible.*

(9) *On se ramène en* 0 *en posant* $x = \pi + h$ *:* $\frac{\ln(-\cos(x))}{\sqrt{\pi}-\sqrt{x}} = \frac{\ln(\cos(h))}{\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi+h}} = \frac{\ln(1-\sin^2(h))}{2\sqrt{\pi}[1-\sqrt{1+h/\pi}]} = \frac{h^2+o(h^2)}{2\sqrt{\pi}[1-(1+h/2\pi+o(h))]} = h + o(h)$ *et la limite est bien* 0.

(10) *Dans* $\mathbb{R}_2[x]$ *de dimension 3, on vérifie sans peine que la famille* $\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ *est libre et forme donc une base de* $\mathbb{R}_2[x]$. *Plus simplement il est suffisant d'observer que* $x^2 + x - x^2 = x$ *et* $x^2 + x + 1 - (x^2 + x) = 1$.