`Durée de l'épreuve 2h, pas de documents, calculatrice, téléphone...`
`Les logarithmes sont tous népériens.`

Exercice 1. *On pose pour* $n \geq 2$ *et* $t \in \mathbb{R}$: $f_n(t) = \dfrac{te^{-nt}}{\log n}$.

(1) *Préciser le domaine de simple convergence de la* ***suite de fonctions*** $(f_n)_n$ *ainsi que sa limite.*

(2) *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformémement sur* $\mathbb{R}_+$.

(3) *Etudier la simple convergence de la* ***série de fonctions*** $F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$.

(4) (a) *Calculer pour* $x > 2$ *l'intégrale* $\int_2^x \frac{dt}{t\log(t)}$ *et en « déduire » la nature de la série* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$.

(b) *La série de fonctions* $F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ *est-elle normalement convergente sur* $\mathbb{R}_+$ *?*

(5) *Montrer la normale convergence sur tout* $[a, b]$ $(0 < a < b < +\infty)$.

(6) *Sur quel plus grand intervalle sommes nous assurés de la continuité de* F *?*

(7) (a) *Montrer que pour tout* $N \geq 3$ *et* $x > 0$:

$$|F(x)| \leq \left|\sum_{n=2}^{N-1} f_n(x)\right| + \left|\sum_{n=N}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \left|\sum_{n=2}^{N-1} f_n(x)\right| + \frac{x}{\log(N)} \cdot \frac{e^{-Nx}}{1-e^{-x}}.$$

(b) *Montrer que pour tout* $N \geq 3$: $\lim_{x\to 0_+} |F(x)| \leq \dfrac{1}{\log(N)}$.

(c) *Montrer que* F *est continue à l'origine.*

(8) *Montrer que la série de fonctions* $G(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n'(x)$ *est normalement convergente sur tout intervalle* $[a, b]$ $(0 < a < b < +\infty)$.

(9) *Que peut-on en déduire quant à la dérivabilité de* F *?*

(10) *On s'intéresse ici à la dérivabilité de* F *à l'origine.*

(a) *Montrer que pour tout* $N \geq 3$ *et* $x > 0$: $\left|\dfrac{F(x)}{x}\right| \geq \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{e^{-nx}}{\log(n)}$.

(b) *En déduire que* $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \left|\frac{F(x)}{x}\right| \geq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\log(n)}$.

(c) *Conclusion ?*

(11) *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\log(n)}$.

`Tournez la page SVP`

Exercice 2. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

(1) *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *(où* $f_n(t) = \frac{1}{1+t^n}$*) est simplement convergente sur* $[0,1]$ *vers une fonction* f *que l'on précisera.*

(2) *Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur* $[0,1]$.

(3) *Montrer que la suite* $(a_n)_n$ *converge et préciser sa limite* l.

(4) *Montrer qu'il existe un réel* $\alpha < 0$ *tel que*

$$a_n = l + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \to +\infty).$$

☯ ☢ ☯ Fin de l'épreuve. ☯ ☢ ☯

I.N.P. **5 Mars 2010**

☯ ☢ ☯ **Suites et séries de fonctions – Examen bis .** ☯ ☢ ☯

Durée de l'épreuve 2h, pas de documents, calculatrice, téléphone
les logarithmes sont népériens et on admet que $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$: $a_n = \int_0^\infty \frac{\log(t)e^{-nt}}{\sqrt{t}}dt$.

(1) *Justifier la convergence des intégrales impropres.*
(2) *Par convergence dominée déterminer* $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.
(3) *Montrer que* $a_n - l = -\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\pi} + \frac{J}{\sqrt{n}}$ *où* J *sera donné sous la forme d'une intégrale.*

Exercice 4. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *on pose* $f_n(t) = \sqrt{f^2(t) + \frac{1}{n}}$.

(1) *Etudier la convergence simple de la suite de fonctions* $(f_n)_n$.
(2) *Montrer la convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$ *de la suite de fonctions* $(f_n)_n$.

Exercice 5. *On pose pour* $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = \sum_{n=1}^\infty xe^{-n^2x^2}$.

(1) *Montrer que* f *est bien définie.*
(2) *Montrer qu'il n'y a pas normale convergence sur* $\mathbb{R}_+$.
(3) *Montrer qu'il y a normale convergence sur tout intervalle* $[a,b]$, $(0 < a < b < +\infty)$.
(4) *Qu'en déduire pour la continuité de* f *?*
(5) *Montrer que pour tout* $N \in \mathbb{N}^\star$: $f(1/N) \geq \sum_{n=1}^N \frac{e^{-n^2/N^2}}{N}$.
(6) f *n'est est-elle continue à l'origine ?*
(7) *Montrer que pour tout* $n \geq 1$ *et tout* $x > 0$: $\int_{n-1}^n xe^{-t^2x^2}dt \geq xe^{-n^2x^2} \geq \int_n^{n+1} xe^{-t^2x^2}dt$.
(8) *En déduire que pour tout* $x > 0$: $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \geq f(x) \geq \int_x^\infty e^{-u^2}du$.
(9) *Montrer que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}_+$.
(10) f *admet-elle une limite en* 0_+ *?*
(11) *Calculer* $\int_0^\infty f(t)dt$.

Exercice 6. (1) *Calculer* $\int_a^b \sin^2(nt)dt$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) *Existe-t-il un intervalle* $[a,b]$ *non réduit à un point sur lequel la suite de fonctions* $(f_n(t) = \sin^2(nt))_n$ *converge simplement vers zéro ?*
(3) *Même question avec la suite de fonctions* $(g_n(t) = \sin(nt))_n$.

☯ ☢ ☯ Fin de l'épreuve. ☯ ☢ ☯

I.N.P. **Février 2011**

☯ ☢ ☯ **Suites et Séries de Fonctions – Examen Final.** ☯ ☢ ☯

Mercredi 16 Février 2011, Examen final, durée 2 heures, pas de documents, calculatrices, téléphones.

Exercice 7. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on pose :* $f_n(x) = x^n(1-x)$ *et* $g_n(x) = nx^n(1-x)$.

(1) *Etudier la simple convergence des deux suites* $(f_n)_n$ *et* $(g_n)_n$ *sur* $[0,1]$.

(2) *La suite* $(f_n)_n$ *est-elle uniformément convergente sur* $[0,1]$ *?*

(3) *La suite* $(g_n)_n$ *est-elle uniformément convergente sur* $[0,1]$ *?*

Exercice 8. *On rappelle les formules vues en TD que l'on pourra admettre :*

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \forall\, t \in]-1,1[\ : \ \log(1-t) = -\sum_{k\geq 1}\frac{t^k}{k}, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{k\geq 0} t^k.$$

(1) *Après avoir justifié la convergence des intégrales impropres, montrer que*

$$\int_0^{1/2} \frac{log(1-t)}{t}dt = \int_{1/2}^1 \frac{log(t)}{1-t}dt.$$

(2) *Exprimer chacune des deux intégrales en fonction de* $S := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n n^2}$.

(3) *En déduire que* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\log^2(2)}{2}$.

Exercice 9. *Soit* $f(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{1+x^{2n}} := \sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

(1) *Montrer que* f *est définie sur* $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$.

(2) *La convergence est-elle uniforme sur* $[0,1[$ *?*

(3) *Montrer que* f *est continue sur* $]-1,1[$.

(4) *Montrer que* $x \in \mathscr{D}$ *si et seulement si* $1/x \in \mathscr{D}$.

(5) *Exprimer* $f(1/x)$ *en fonction de* $f(x)$ *pour tout* $x \in \mathscr{D}$.

(6) *En déduire que* f *est continue sur* $\mathscr{D}$.

(7) *Montrer que pour tout* $0 < a < 1$ *et* $|x| \leq a$ *on a* $|f_n'(x)| \leq 2na^{n-1}$.

(8) *Montrer que* $f \in \mathscr{C}^1(]-1,1[)$.

(9) *Montrer que* f *est croissante sur* $[0,1[$.

(10) *Avec la question (5), montrer que* $f \in \mathscr{C}^1(]1,+\infty[)$ *et précisez ses variations sur* $]1,+\infty[$.

(11) *Montrer que pour tout* $x \in]0,1[$ *:* $\frac{1}{2(1-x)} \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}$.

(12) *En déduire la limite de* f *en* 1_-.

(13) *Quelle est la limite de* f *en* 1_+ *?*

(14) *Quelle est la limite de* f *en* $+\infty$ *?*

(15) *Esquisser le graphe de* f *sur* $\mathbb{R}_+$

 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

I.N.P. **13 Janvier 2012**

EXAMEN FINAL, Suites et Séries de Fonctions.

Durée 2h, documents, calculatrices, téléphones interdits.
Les logarithmes sont tous népériens.

Exercice 10. *(6 points) Soient $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Répondre aux questions suivantes ou bien fournir un contre-exemple, une représentation graphique du graphe de f_n peut parfaitement suffire.*

(1) *On suppose que la suite $(f_n)_n$ est **simplement** convergente sur $\mathbb{R}$ vers f.*
   (a) *Si les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi croissante sur $\mathbb{R}$?*
   (b) *Si les f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$?*
   (c) *Si les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi continue sur $\mathbb{R}$?*
   (d) *Si les f_n sont bornées sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi bornée sur $\mathbb{R}$?*

(2) *On suppose que la suite $(f_n)_n$ est **uniformément** convergente sur $\mathbb{R}$ vers f.*
   (a) *Si les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi croissante sur $\mathbb{R}$?*
   (b) *Si les f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$?*
   (c) *Si les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi continue sur $\mathbb{R}$?*
   (d) *Si les f_n sont bornées sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi bornée sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 11. *(11 points) On rappelle que $\zeta(2) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(3) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3} \simeq 1.2$.*

(1) *A l'aide des sommes partielles $1 + x + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$ montrer que $\sum_{k=0}^\infty x^k = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in]-1,1[$.*

(2) *Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$: $\log(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k}$.*

(3) *Préciser (soigneusement) le domaine de définition de $F(x) = \int_0^1 t^x \log(t)\log(1-t)dt$.*

(4) *Montrer que F est continue sur $]-2,+\infty[$.*

(5) *Montrer que pour tout $x > -2$ on a $F(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+x+1)^2}$.*

(6) *Montrer que $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+2)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$.*

(7) *Montrer que $F(1) = \int_0^1 t\log(t)\log(1-t)dt = 1 - \frac{\zeta(2)}{2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}$.*

(8) *Calculer $F(-1)$ et montrer que $F(0) = \int_0^1 \log(t)\log(1-t)dt = 2 - \zeta(2) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.*

Exercice 12. *(4 points) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{ch(x)}$ est convergente, enfin montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{ch(x)} = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.*

Fin de l'épreuve

I.N.P. **27 Février 2012**

☯ ☢ ☯ EXAMEN FINAL Bis, Suites et Séries de Fonctions. ☯ ☢ ☯

ℹ `Durée 2h, documents, calculatrices, téléphones interdits.`
`Les logarithmes sont tous népériens.`

Exercice 13. *(5 points) Soient $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ est* ***simplement*** *convergente sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.*

(1) *Si les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$ montrer que f est aussi croissante sur $\mathbb{R}$.*

(2) *On suppose les f_n strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, montrer à l'aide d'un exemple judicieusement choisi que f n'est pas forcément strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

(3) *On suppose les f_n bornées sur $\mathbb{R}$, et la suite $(f_n)_n$* ***uniformément*** *convergente sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.*

 (a) *Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq 1$.*

 (b) *Montrer que f est aussi bornée sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 14. *(10 points) Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.*

(1) *Étudier la simple convergence sur $\mathbb{R}$ de cette* ***suite*** *de fonctions.*

(2) *Montrer que la convergence de la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.*

(3) *Étudier la simple convergence sur $\mathbb{R}$ de la* ***série*** *de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.*

(4) *Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ n'est pas normale sur $\mathbb{R}$.*

(5) *Étudier l'uniforme convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.*

(6) *En déduire que $\sum_{n\geq 0} f_n = f$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$.*

(7) *Montrer que pour tout $x > 0$ on a $G(x) := \sum_{n\geq 0} e^{-nx^2} = \frac{1}{1-e^{-x^2}}$.*

(8) *Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $G'(x) = -2f(x)$ pour tout $x > 0$.*

(9) *Montrer que f n'est pas continue à l'origine.*

Exercice 15. *(6 points) Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.*

(1) *Etudier la simple convergence sur $[0,1]$ de cette suite de fonctions.*

(2) *Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$.*

(3) *Calculer la $\lim_{n\to+\infty} I_n$.*

(4) *En déduire que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.*

(5) *Donner une démonstration directe du fait que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.*

☯ ☢ Fin de l'épreuve ☢ ☯