I.N.P. **Janvier 2012**

☯ ☢ ☯ Suites et Séries de Fonctions – Feuille 3. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Pour* $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ *on pose* $a_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{nf(t)}{1+n^2t^2} dt$. *Aprés avoir justifié la définition de* a_n*, montrer que la suite* a_n *converge et préciser sa limite.*

Exercice 2. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^n} dt$. *Aprés avoir justifié la définition de* a_n*, montrer que la suite* a_n *converge, préciser sa limite et donner un équivalent de* a_n.

Exercice 3. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}_+$: $f_n(x) = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^n}$.

(1) *Montrer que l'intégrale impropre* $I_n := \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt$ *converge si et seulement si* $n \geq 2$.

(2) *Montrer que la suite* $(I_n)_2^\infty$ *converge et préciser sa limite.*

Exercice 4. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$: $a_n = \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

(1) *Déterminer la limite* l *de la suite* $(a_n)_n$.

(2) *Déterminer un équivalent de* $a_n - l$.

(3) *Montrer que* $u_n = l + \frac{a}{n} + \frac{J}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *où l'on exprimera* J *sous forme d'une intégrale.*

Exercice 5. *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *telle que :* $f(0) = 0, f'(0) = 1$ *et* $f(x) \geq x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+$. *Etudier la suite* $u_n)_n$ *de terme général* $u_n = \int_0^\infty \frac{ndt}{1+n^2f^2(t)}$.

Exercice 6. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $x \in \mathbb{R}_+^\star$: $f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n}(1+x/n)^n}$.

(1) *Montrer que l'intégrale impropre* $I_n := \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt$ *converge si et seulement si* $n \geq 2$.

(2) *Montrer que pour tout* $x \geq 1$ *et* $n \geq 2$: $|f_n(x)| \leq 4/x^2$.

(3) *Montrer que la suite* $(I_n)_2^\infty$ *converge et préciser sa limite.*

Exercice 7. (1) *Montrer que :* $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} = \int_0^1 x^x dx, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x} dx,$.

(2) *Montrer que :* $\sum_{n=0}^\infty \frac{2}{n^3} = \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1},$.

(3) *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt = x$.

(4) *Montrer que pour tout* $a > 0$: $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{na+1}$.

(5) *Si* $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ *croit vers* $+\infty$*, montrer que* $\int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 0} (-1)^n e^{-a_n x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{a_n}$.

Exercice 8. *Soit* $f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2xt) dt$. *Montrer que* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe une suite* $(a_n)_n$ *de réels telle que* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. *Montrer que* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4$ *en considérant la fonction* $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ *(montrer successivement que* f *est définie et continue sur* $]-1,1|$*, égale à* $\arctan(x)$ *sur* $]-1,1[$ *et continue sur* $[0,1]$*...)*

Exercice 10. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$: $a_n = \int_0^\infty \frac{\log(t)e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$.

(1) *Justifier la convergence des intégrales impropres.*

(2) *Par convergence dominée déterminer* $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.

(3) *Montrer que* $a_n - l = -\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\pi} + \frac{J}{\sqrt{n}}$ *où* J *sera donné sous la forme d'une intégrale.*

Exercice 11. *Soit* $f(x) = \int_0^\infty e^{-u} \frac{\sin(xu)}{u} du$.

(1) *Montrer que f est indéfiniment dérivable sur son domaine définition.*

(2) *Montrer que sur $]-1,1[$ on a un développement sous la forme $f(x)=\sum_n a_n x^n$.*

(3) *En déduire f sur $]-1,1[$. Montrer que cette expression subsiste sur tout $\mathbb{R}$.*

Exercice 12. *$\mathscr{E}([a,b])$ est l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ nulles en dehors de $[a,b]$.*

(1) *Soit $f\in\mathscr{E}([a,b])$, montrer l'existence de $\nu(f)=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx$.*

(2) *Montrer qu'il existe deux constantes α,β ne dépendant que des réels a et b telles que $|\nu(f)|\leq\alpha\|f\|+\beta\|f'\|_\infty$ pour toute fonction $f\in\mathscr{E}([a,b])$.*

(3) *Peut-on choisir $\beta=0$?*

Exercice 13. *Soit $P(x)=6+4x+3x^2+8x^3+3x^4+4x^5+6x^6\in\mathbb{R}[x]$, on pose pour $x\in[0,5[$: $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{P(t)}dt$. En quels point de $[0,5[$, g atteint-elle sa borne inférieure ? Que dire de sa borne supérieure ?*

Exercice 14. *Domaine de définition, puis calcul de $F(x)=\int_0^\infty\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt$.*

Exercice 15. *Montrer que $\int_0^\infty\frac{x}{ch(x)}dx=2\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.*

Exercice 16. *Convergence et calcul de $\int_0^\infty\frac{\log(t)}{1-t^2}dt$.*

Exercice 17. *Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $f(x)=\int_0^\infty\frac{dt}{1+t+t^x}$, limites aux bornes du domaine.*

Exercice 18. *Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $f(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+t^2}}dt$. Préciser les équivalents et limites de f aux bornes du domaine.*

Exercice 19. *Etudier sur son domaine de définition la fonction définie par $f(x)=\int_{\mathbb{R}_+}e^{-tx}\log(t)dt$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f. En déduire la forme explicite de f.*

Devoir 3, à rendre en TD le vendredi 8 février : Pour tout entier $n\geq 2$ on pose $u_n=\int_0^{\pi/2}\left(\cos\left(\frac{\pi\sin(x)}{x}\right)\right)^n dt:=\int_0^{\pi/2}f_n(t)dt$.

(1) Montrer que u_n est bien défini et étudier la suite $(u_n)_n$.

(2) Montrer que pour tout $x\in[0,\pi/2]$: $\frac{\pi x}{2}\leq\sin(x)\leq x$.

(3) Montrer que pour tout $\alpha>0$: $\left(\frac{\pi}{2}\int_0^1\cos^n(t)dt\right)^\alpha\leq u_n^\alpha\leq\left(\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)dt\right)^\alpha$.

(4) Montrer que pour tout $a>0$: $\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)dt\sim C(a)/\sqrt{n}$ ($C(a)$ constante).

(5) Quelle est la nature de la série de terme général u_n^α selon les valeurs de $\alpha>0$.

Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr