Exercice 1. (1) *Montrer que* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2n^4}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$, *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^\star$ *et étudier sa dérivabilité à l'origine (encadrer le taux d'accroissement de* f *en comparant avec des intégrales...).*

(2) *Etudier* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ *sur son domaine de définition, continuité, dérivabilité (en particulier montrer que* f *est dérivable à droite en* 0_+*...).*

(3) *Etudier* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ *sur son domaine de définition, continuité, dérivabilité (en particulier à l'origine...).*

(4) *Montrer que* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Arctan(nx)}{n^2}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$, *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^\star$ *et étudier sa dérivabilité à l'origine.*

Exercice 2. *Etudier la convergence uniforme des séries suivantes sur l'ensemble* A *:*

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right), \quad A =]0, +\infty[.$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), \quad A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1/2 \leq |x| \leq 2\}.$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - Arctan(n^2(1+x^2))\right), \quad A = \mathbb{R}.$

Exercice 3. (1) *Etude de la série de fonctions* $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{|x|}{x^2+n^2}$.

(2) *Etude de la série de fonctions* $f(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4. *Montrer que* $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{E(nx)}{n^3}$ *(*E *est la partie entière) est définie sur* $\mathbb{R}$, *continue sur* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *discontinue sur* $\mathbb{Q}$ *(mais tout de même continue à droite).*

Devoir 2, à rendre en TD le vendredi 25 janvier.

Exercice 5. (1) *Montrer que pour tout* $x \in [0, \pi/2]$ *:* $\sin(x) \geq 2x/\pi$.

(2) *Montrer que la fonction* f *définie par* $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

(3) (a) *Pour* $N \geq 1$ *on pose* $x_N = \pi/2^{N+1}$, *montrer que* $f(x_N) \geq \frac{2Nx_N}{\pi}$.

(b) *En déduire que* f *n'est pas dérivable à l'origine.*

14 janvier 2013 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr