Exercice 1. *Etudier les suites de fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, g_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2},\ h_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2},\ k_n(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\ n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2. *Soient* $k \in \mathbb{N}$, *et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *la suite de fonctions définie par* $f_n(x) = \frac{x^k}{x^2+n}$. *Pour quelles valeurs de* k *cette suite converge-t'elle uniformément sur* $\mathbb{R}$ *? sur toute partie bornée de* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 3. *On définit la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_n(x) = nx\sin(x)e^{-nx}$.

(1) *Montrer que* $(f_n)_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}_+$ *vers la fonction nulle.*
(2) *Etudier les variations de* $\varphi(t) = te^{-t}$ *sur* $[1, +\infty[$.
(3) *En déduire la convergence uniforme sur* $[\pi/2, +\infty[$ *de la suite* $(f_n)_n$.
(4) *Montrer que* $f_n' > 0$ *sur* $]0, 1/n[$ *et s'annule en un unique point* x_n *sur* $]1/n, \pi/2[$. *En déduire les variations de* f_n *sur* $[0, \pi/2]$.
(5) *En déduire la convergence uniforme sur* $[0, \pi/2]$ *puis sur* $\mathbb{R}_+$ *de la suite* $(f_n)_n$.

Exercice 4.

(1) *Etudier la suite de fonctions définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par* $f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{2n} x^k\right)^{-1},\ n \in \mathbb{N}$.
(2) *Etudier la suite de fonctions définie sur* $[0, 1]$ *par* $f_n(x) = 4^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right),\ n \in \mathbb{N}$.
(3) *Etudier la suite de fonctions définie sur* $[1, +\infty[$ *par* $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$.
(4) *Etudier la suite de fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = \sqrt[2n]{1 + x^{2n}}$.
(5) *On pose pour* $n \in \mathbb{N}$ *:* $f_n(x) = \sqrt{n+1}\sin^n(x)\cos(x)$. *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$*, la convergence est-elle uniforme sur* $\mathbb{R}$ *?*
(6) *Etudier la convergence simple et uniforme sur* $\mathbb{R}_+$ *de la suite de fonctions* $f_n\ :\ x \mapsto x^n e^{-x}/n!$ *et déterminer* $\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt$. *Commentaire ?*
(7) *Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *où* f_n *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_n(x) = \cos^n(x/\sqrt{n})$ *(commencer par montrer que pour tout réel* u *:* $1 - u^2/2 \leq \cos(u) \leq 1 - u^2/2 + u^4/24$ *puis, que pour tout* $u \in [0, 1/2]$ *:* $-u - u^2 \leq \log(1-u) \leq -u$*).*

Exercice 5. *Soit* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$.

(1) *Montrer que chaque* $f_n \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
(2) *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f *continue.*
(3) *Sans calcul, expliquer pourquoi il n'existe pas de réel* $a > 0$ *tel que la suite* $(f_n')_n$ *converge uniformément sur* $[-a, a]$.

Exercice 6. *On pose, pour* $x \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}^\star$ *:* $f_n(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/n}}$. *Etudier la convergence simple puis uniforme sur* $\mathbb{R}_+$ *et sur tout intervalle* $I \subset \mathbb{R}_+$ *de la suite de fonctions* $(f_n)_n$.

Exercice 7. *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *à dérivée uniformément continue sur* $\mathbb{R}$. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$ *:* $f_n(x) = nf(x + n^{-1}) - f(x))$. *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers* f'. *Par un exemple, montrer que l'hypothèse de continuité uniforme sur* f' *est essentielle.*

Exercice 8. *Que dire d'une fonction* $f\in\mathscr{C}^0([a,b])$ *vérifiant* $\int_a^b t^n f(t)dt=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$ *?*

Exercice 9. *Pour* $n\in\mathbb{N}^\star$ *et* $x\in\mathbb{R}$ *on pose* $f_n(x)=Arctan(x/n)$.

1) Montrer que la suite $(f_n)_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$*. La convergence est-elle uniforme ?*

2) Montrer que la suite $(f_n')_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 10. *Soit* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ *vériifiant* $f(0)=0=\lim_{+\infty}f(x)$*. On pose pour* $n\in\mathbb{N}^\star, x\in\mathbb{R}_+$ *:* $g_n(x)=f(nx)f(x/n)$*. Montrer que la suite* $(g_n)_n$ *est uniformément convergente sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11. *Soit* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *vérifiant pour tout* $x\in\mathbb{R}^\star$ *:* $|f(x)|<|x|$*. Montrer que la suite des itérés* $(f^n:=f\circ f\cdots\circ f)_n$ *est uniformément convergente vers la fonction nulle sur* $[-a,a]$ *pour tout* $a>0$.

Exercice 12. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions uniformément continues sur* $\mathbb{R}$ *qui converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers* f*, montrer que* f *est uniformément continue.*

Exercice 13. *Soit* $(P_n)_n$ *une suite de polynômes uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$ *vers* f*, montrer que* f *est un polynôme.*

Exercice 14. *Soient* $I\subset\mathbb{R}$ *un intervalle,* $P\in\mathbb{R}[X]\setminus\{X\}$ *vérifiant* $P(I)\subset I$ *et* $(P_n)_n$ *la suite d'applications définie par* $P_1=P$ *et* $P_{n+1}=P_n\circ P$ *pour tout* $n\geq 2$*. On suppose que la suite* $(P_n)_n$ *converge uniformément sur* I *vers* f*. Montrer que* f *est constante.*

Exercice 15. *Soit* $f\ :\ ]0,1]\ni t\mapsto f(t)=\sin(1/t)$*. Montrer que* f *n'est pas limite uniforme sur* $]0,1]$ *d'une suite de polynômes.*

Exercice 16. *Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *où* f_n *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_n(x)=\cos^n(x/\sqrt{n})$ *(commencer par montrer que pour tout réel* u *:* $1-u^2/2\leq\cos(u)\leq 1-u^2/2+u^4/24$ *puis, que pour tout* $u\in[0,1/2]$ *:* $-u-u^2\leq\log(1-u)\leq -u$*).*

Exercice 17. *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *où* f_n *est définie sur* $]-\pi,\pi[$ *par* $f_n(x)=\sum_{p=1}^n 2^{-p}\tan(2^{-p}x)$ *est simplement convergente sur* $]-\pi,\pi[$ *vers une limite que l'on précisera (on pourra utiliser après l'avoir démontrée, la formule* $\tan(y/2)=cotan(y/2)-2cotan(y)$*).*

Devoir 1, à rendre en TD le vendredi 18 janvier.

Exercice 18. *On se propose d'étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions* $(g_n)_n$ *définie pour* $x\in\mathbb{R}$ *et* $n\in\mathbb{N}^\star$ *par* $g_n(x)=\cos(x/2)\cos(x/2^2)\dots\cos(x/2^n)$.

(1) *Montrer que si* $x\neq k2^n\pi$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$*, alors* $g_n(x)=\frac{\sin(x)}{2^n\sin(x/2^n)}$.

(2) *Montrer que la suite* $(g_n)_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* $g\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

(3) *En remarquant que* $g_n(2^n\pi)=-1$*, a-t-on convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$ *?*

(4) *Montrer que* $\mathbb{R}^\star\ni u\mapsto\frac{1}{\sin(u)}-\frac{1}{u}$ *se prolonge continument en* $u=0$.

(5) *Soit* $a>0$*, montrer qu'il existe* $M>0$ *et* $n_1\in\mathbb{N}$ *tels que* $\sup_{|x|\leq a}|g_n(x)-g(x)|\leq\frac{M}{2^n}$ *pour tout* $n\geq n_1$.

(6) *Conclure.*

5 janvier 2013 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr