Exercice 1. *Soient $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ telles que les matrices $A, A+B, A+2B, A+3B$ et $A+4B$ soient inversibles à matrices inverses à coefficients dans $\mathbb{Z}$; en est-il de même pour $A+2013B$?*

Exercice 2. *Montrer que l'équation $A^2 = -I_3$ d'inconnue A, n'admet pas de solutions dans $M_3(\mathbb{R})$. Et dans $M_3(\mathbb{C})$?*

Exercice 3. *Soit n un entier impair et $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 = O_n$ ou $A^2 = I_n$. Montrer que* $\det(A + I_n) \geq \det(A - I_n)$.

Exercice 4. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1, montrer que* $\det(A + I_n) = \mathit{trace}(A) + 1$.

Exercice 5. *Soit n un entier impair, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $BA = O_n$. Montrer que l'une des deux matrices $A + {}^tA$, $B + {}^tB$ n'est pas inversible.*

Exercice 6. *Soit n un entier pair, $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et $J \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice attila (avec des 1 partout...). Montrer que $\forall\, t \in \mathbb{R}$:* $\det(A + tJ) = \det(A)$.

Exercice 7. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array}\right) \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que* $\det(M) \geq 0$.

Exercice 8. (1) *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que* $\det(I_n + A^2) \geq 0$.

(2) *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. Si* $\det(A + B) \geq 0$ *montrer que* $\det(A^k + B^k) \geq 0$ *pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.*

Exercice 9. *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant le déterminant de Vandermonde :*

$$\Delta_n = V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 10. *Calculer le déterminant de la matrice $A = ((a_{ij} = (i + j - 1)^n))_{1 \leq i,j \leq n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$.*

Exercice 11. *Calculer le déterminant* $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 + a_n \end{vmatrix}$.

Exercice 12. *Soit $\varepsilon = e^{2i\pi/n}$ et* $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \ldots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$, $C_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \\ & & & \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 \end{pmatrix}$.

(1) *Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ le module et l'argument* $\det(A_n)$ *(on pourra commencer par calculer A_n^2).*

(2) *En déduire (calculer* $\det(CA_n)$*) la valeur du déterminant « circulant »* $\det(C_n)$.

Exercice 13. *Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :* $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(1) *Montrer que* $\forall n \geq 2\ :\ \Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$ *(avec la convention* $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 3$*).*

(2) *En introduisant la suite de terme général* $v_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}, (n \in \mathbb{N}^\star)$, *montrer que* $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 14. *Soit* $P \in \mathbb{C}[x]$ *de degré* $n-1 \geq 0$.

(1) *Montrer que tout polynôme* $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[x]$ *se décompose de manière unique sous la forme* $Q(x) = a_0P(x) + a_1P(x+1) + \cdots + a_{n-1}P(x+n-1)$.

(2) *En déduire pour tout réel* x *le déterminant* $\Delta = \begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \dots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & \dots & P(x+n+1) \\ \vdots & & & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & \dots & P(x+2n) \end{vmatrix}$.

Exercice 15. *Soient* $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{C}[x]$ *vérifiant* $deg(P_i) = i$ *pour tout* $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. *Pour* $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, *exprimer au moyen d'un déterminant de Vandermonde le déterminant* $D = \begin{vmatrix} P_0(x_0) & P_1(x_0) & \dots & P_n(x_0) \\ P_0(x_1) & P_1(x_1) & \dots & P_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \dots & P_n(x_n) \end{vmatrix}$.

Application : pour $\theta_0, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ *calculer* $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_0) & \cos(2\theta_0) & \dots & \cos(n\theta_0) \\ 1 & \cos(\theta_1) & \cos(2\theta_1) & \dots & \cos(n\theta_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & \cos(\theta_n) & \cos(2\theta_n) & \dots & \cos(n\theta_n) \end{vmatrix}$. *On pourra commencer par démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *il existe un unique polynôme* $P_n \in \mathbb{R}[x]$ *vérifiant pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

Exercice 16. *Calculer en établissant une relation de récurrence*

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]},\ D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]},\ D_n = \begin{vmatrix} C_1^0 & C_1^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & & \vdots \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \ddots & \vdots \\ C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & C_{n-1}^{n-1} \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Devoir 2. A remettre la semaine du 05/03/2013.

Exercice 17. *Calculer le déterminant* $\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

Exercice 18. *Calculer le déterminant de la matrice* $A = ((a_{ij} = |i-j|))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$.

28 janvier 2013 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr