Exercice 1. *Résoudre les système linéaires suivants :*

$$\begin{cases} x+y+(1-m)z &= m+2 \\ (1+m)x-y+2z &= 0 \\ 2x-my+3z &= m+2. \end{cases}, \quad \begin{cases} x\cos 2\alpha + y\cos\alpha + z = & a \\ x\cos 2\beta + y\cos\beta + z = & b \\ x\cos 2\gamma + y\cos\gamma + z = & c. \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y+z+t &= a \\ x-y-z+t &= b \\ -x-y+z+t &= c \\ -3x+y-3z-7t &= d \end{cases}$$

Exercice 2. *Déterminer le reste de la division euclidienne de $p(x) = x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ par le polynôme $x^3 - x$.*

Exercice 3. *Soit $A = ((a_{ij})) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que le module de tout élément diagonal soit strictement supérieur à la somme des modules des autres coefficients dans la même ligne, i.e.*

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| \cdots + |a_{in}|, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Montrer que A est inversible (considérer le système $AX = 0_{\mathbb{R}^n}$).

Exercice 4. *Déterminer la boule (euclidienne) de $\mathbb{R}^3$ passant par les quatre points $A_1 = (1,0,0), A_2 = (1,1,0), A_3 = (1,1,1), A_4 = (0,1,1)$.*

Exercice 5. • *Résoudre les systèmes linéaires suivants en discutant s'il y a lieu des valeurs des paramètres réels.*

$$\begin{cases} x+2y &= 5 \\ x+3y &= 5 \\ x+7y &= \beta \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y-az &= 0 \\ x+ay-z &= 0 \\ x+(a+1)y+2z &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ax+y+z &= 1 \\ x+ay+z &= a \\ x+y+az &= a^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+y-z &= 0 \\ x+2y+z &= 0 \\ 3x+y-2z &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ x+2y+z &= -1 \\ 3x+y-2z &= 2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ x+2y+z &= 0 \\ 3x+y-2z &= 2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. *Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,-2,0,3)$, $v_2 = (2,3,0,1)$, $v_3 = (2,-1,2,1)$ forment une famille libre ; montrer que le vecteur $v = (3,9,-4,-2)$ appartient au sous espace E engendré par les trois vecteurs v_1, v_2, v_3 et déterminer les composantes de v dans cette base de E.*

Exercice 7. *Soient a, b, et c trois nombres réels.*

1) Quelle relation doivent satisfaire les paramètres a, b et c pour que le système suivant ait au moins une solution ?

$$\mathcal{S}_{abc} : \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

2) Est-ce que le système $\mathcal{S}_{abc}$ peut avoir une unique solution ?

Exercice 8. *Soient a, b, c et d des éléments de $\mathbb{C}$ deux à deux distincts.*
Résoudre sur $\mathbb{K}$ les systèmes suivants :

$$a)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^3x+b^3y+c^3z=d^3 \end{cases}$$

Exercice 9. *Résoudre en fonction des paramètres $a, b, c \in \mathbb{C}$ les systèmes*

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}, \qquad \begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ \bar{a}x+y+az=0 \\ \bar{a}^2x+\bar{a}y+z=0 \end{cases}$$

Exercice 10. *On considère pour $a, b \in \mathbb{R}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_{a,b}) \qquad \begin{cases} ax + y + z = \alpha \\ x + by + bz = \beta \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice $A_{a,b}$ du système et étudier son rang.*
(2) *Dans un repère Oab représenter les couples (a, b) tels que $A_{a,b}$ ne soit pas de rang maximal.*
(3) *Pour quels couple (a, b) le système $(\mathscr{S}_{a,b})$ admet-t-il une unique solution ?*
(4) ***Sans résoudre le système** que peut-on dire de l'ensemble des solutions du système lorsque $A_{a,b}$ est de rang maximal.*
(5) *Même question si $A_{a,b}$ n'est pas de rang maximal.*
(6) *Résoudre le système si $A_{a,b}$ n'est pas de rang maximal.*
(7) *Résoudre le système si $(a, b) = (2, -1)$.*

Exercice 11. *Soit $A = ((a_{ij})) \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i,j} \in \{1, -1\}$, montrer que $2^{n-1} \mid \det A$. (par récurrence sur n, ajouter la première colonne à toutes les autres puis développer par rapport à la première colonne).*

Exercice 12. *Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :*

$$a)\ \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad b)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad c)\ \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$$d)\ \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \quad e)\ \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \quad f)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}.$$

Exercice 13. *Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(a_{\max(i,j)})$. En déduire en particulier $\det(\max(i, j))$ et $\det(\min(i, j))$.*

Exercice 14. *Comparer $\det(a_{i,j})$ et $\det((-1)^{i+j}a_{i,j})$ où $((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{K})$.*

Exercice 15.
(1) *Soit $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\bar{A} = ((\bar{a}_{i,j})) \in M_n(\mathbb{C})$. Former une relation liant $\det(A)$ et $\det \overline{A}$.*
(2) *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \bar{A}$. Montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.*

Exercice 16. *Deux matrices A et B vérifient $AB = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{pmatrix}$. Déterminer x et y. En déduire A et B.*

Exercice 17. *Calculer le rang des matrices suivantes et, lorsque cela est possible leur déterminant.*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. *Calculer les déterminants suivants :* $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}$.

Exercice 19. *On se propose de déterminer les valeurs possibles du déterminant d'une matrice* $A = ((a_{ij})) \in M_4(\{1, -1\})$ *(autrement dit, une matrice* 4×4 *à coefficients dans* $\{1, -1\}$*).*

(1) *Soit* $A = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ *(*C_i *est la i-ème colonne de A) une telle matrice. Montrer que* $\det(A) = \det(C_1 + C_4, C_2 + C_4, C_3 + C_4, C_4)$.

(2) *En déduire que* $\det(A)$ *est un multiple de* 8.

(3) *Montrer que l'on peut écrire* $\det(A) = a_{11}D_1 + a_{22}D_2 + a_{33}D_3 + a_{44}D_4$ *où* $D_i \in M_3(\{1, -1\})$.

(4) *Montrer que pour tout* $i = 1 \dots 4$ *:* D_i *est un multiple de* 4 *et* $|D_i| \leq 6$.

(5) *En déduire que* $\det(A) \in \{-16, -8, 0, 8, 16\}$.

(6) *Calculer le déterminant des matrices* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(7) *En déduire les valeurs possible pour* $\det(A)$.

Exercice 20. *Calculer le déterminant et le rang de l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *défini par*

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + y, z).$$

Exercice 21. *Montrer que pour tout* a, b, c *réels le déterminant* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$ *est nul. Déterminer le rang de cette matrice suivant les valeurs des paramètres* a, b, c.

Exercice 22. *Déterminer déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$*, étudier son rang en fonction des paramètres* a, b, c.

Exercice 23. *Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? si oui préciser leur inverse, sinon leur rang.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R}.$$

Exercice 24. *Calculer les déterminants suivants en précisant les valeurs des paramètres qui annulent ces déterminants.*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & a_n \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 25. *Soient* $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$*, n scalaires distincts et* $A := \mathrm{VDM}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = ((\alpha_i^{j-1})) \in M_n(\mathbb{R})$ *la matrice de Vandermonde associée. Montrer que A est inversible en interprétant le système* $MX = O_{\mathbb{R}^n}$ *dans* $\mathbb{R}_{n-1}[x]$*.e*

Exercice 26. *Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. *On désignera par* $\widehat{A}$ *la matrice obtenue à partir de* A *en remplacant pour tout* $1 \leq i \leq n$ *la* i*-ième colonne de* A *par la sommes des autres colonnes. On désigne par* $\widetilde{A}$ *la matrice déduite de* A *en retranchant pour tout* $1 \leq i \leq n$ *à la* i*-ième colonne de* A *la sommes des colonnes d'indices distincts de* i. *Exprimer en fonction de* $\det(A)$ *les déterminants* $\det(\widehat{A})$ *et* $\det(\widetilde{A})$.

Devoir 1. A remettre le Jeudi 24 Janvier 2013.

Exercice 27. *Résoudre en fonction de* $a \in \mathbb{C}$ *le système* $\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ \bar{a}x + y + az = 0 \\ \bar{a}^2x + \bar{a}y + z = 0 \end{cases}$

Exercice 28. *Soient* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *deux à deux distincts.*

a) Résoudre (en introduisant : $P(X) = X^3 - (x + yX + zX^2)$*) le système :* $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$

b) Même question pour $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^4 \\ x + by + b^2z = b^4 \\ x + cy + c^2z = c^4 \end{cases}$

Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr