`Durée de l'épreuve 1h30, pas de documents, calculatrice, téléphone.`
`Il est obligatoire de signaler les opérations sur les lignes/colonnes effectuées dans vos calculs.`

Exercice 1. *On considère pour $a \in \mathbb{R}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_a) \quad \begin{cases} x + y + z = \alpha \\ x + 2y + 4z = \beta \\ x + ay + a^2 z = \gamma \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice A_a du système calculer son déterminant et étudier son rang.*

(2) *Résoudre le système lorsqu'il est de rang maximal en exprimant la solution à l'aide de déterminants qu'il n'**est pas utile** de calculer.*

(3) *Résoudre le système si $a = 2$.*

Exercice 2. *Pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ on pose :* $D(a_1, \ldots, a_n) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$. *Calculer **sous forme factorisée** $D(a_1), D(a_1, a_2), D(a_1, a_2, a_3)$ et en déduire $D(a_1, \ldots, a_n)$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.*

Exercice 3. *On considère pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_a) \quad \begin{cases} x + ay + a^2 z = \alpha \\ a^2 x + ay + z = \beta \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice A_a du système et étudier son rang suivant les valeurs de a.*

(2) *On suppose A_a de rang maximal, sans résoudre le système sommes nous assurés de l'existence de solutions pour tout choix de ${}^t(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$? Si oui, quelle est l'allure dans l'ensemble des solutions ?*

(3) *Si $(\mathscr{S}_a)$ n'est pas de rang maximal, sommes nous assurés de l'existence de solutions pour tout choix de ${}^{(}\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$?.*

(4) *Résoudre le système si $a = -1$.*

Exercice 4. *Calculer le déterminant de la matrice suivante :*

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Calculer alors, suivant la valeur du paramètre m, le rang de cette matrice.

`Tournez la page SVP`

Exercice 5. *On considère pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_a) \quad \begin{cases} x + ay + a^2 z = \alpha \\ a^2 x + ay + z = \beta \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice A_a du système et étudier son rang suivant les valeurs de a.*

(2) *A_a est de rang maximal, et sans résoudre le système, sommes nous assurés de l'existence de solutions pour tout choix de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$? Si oui, quelle est l'allure dans l'ensemble des solutions.*

(3) *Si $(\mathscr{S}_a)$ n'est pas de rang maximal, sommes nous assurés de l'existence de solutions pour tout choix de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$?.*

(4) *Résoudre le système si $a = -1$.*

☯ ☢ ☯ Fin de l'épreuve. ☯ ☢ ☯

I.N.P. **31 Mars 2010**

☯ ☢ ☯ **Déterminants et Systèmes Linéaires – Examen.** ☯ ☢ ☯

`Durée de l'épreuve 1h30, pas de documents, calculatrice, téléphone.`
`Il est obligatoire de signaler les opérations sur les lignes/colonnes effectuées dans vos calculs.`

Exercice 6. *On considère pour $a, b \in \mathbb{R}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_{a,b}) \quad \begin{cases} ax + y + z = \alpha \\ x + by + bz = \beta \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice $A_{a,b}$ du système et étudier son rang.*

(2) *Dans un repère Oab représenter les couples (a, b) tels que $A_{a,b}$ ne soit pas de rang maximal.*

(3) *Pour quels couple (a, b) le système $(\mathscr{S}_{a,b})$ admet-t-il une unique solution ?*

(4) ***Sans résoudre le système*** *que peut-on dire de l'ensemble des solutions du système lorsque $A_{a,b}$ est de rang maximal.*

(5) *Même question si $A_{a,b}$ n'est pas de rang maximal.*

(6) *Résoudre le système si $A_{a,b}$ n'est pas de rang maximal.*

(7) *Résoudre le système si $(a, b) = (2, -1)$.*

Exercice 7. *On considère pour $a \in \mathbb{C}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_a) \quad \begin{cases} x + y + z = \alpha \\ x + a^2 y + z = \beta \\ x + y + a^3 z = \gamma \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice A_a du système et calculer son déterminant.*

(2) *Etudier le rang de A_a.*

(3) *Pour quelles valeurs de a le système admet-il une unique solution ? Préciser alors cette solution à l'aide de déterminants qu'il n'****est pas utile*** *de calculer.*

(4) *Résoudre le système lorsque $a = -1$.*

Exercice 8. *Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

(1) *Montrer que $\forall n \geq 2 \;:\; \Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$ (avec la convention $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 3$).*

(2) *En introduisant la suite de terme général $v_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}, (n \in \mathbb{N}^\star)$, montrer que $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$.*

`Tournez la page SVP`

Exercice 9. *Calculer* ***sous forme factorisée*** *le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Montrer que cette matrice est de rang maximal dès que le vecteur ${}^t(a,b,c)$ *évite dans* $\mathbb{R}^3$ *trois plans dont on précisera une équation cartésienne.*

I.N.P. **Mars 2011**

Systèmes et Déterminants – Examen Final.

Jeudi 10 Mars 2011, Examen final, durée 1 heure 30,
pas de documents, calculatrices, téléphones.

Exercice 10. *Déterminer les* $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^\star)^3$ *solutions de* $\begin{cases} xy^{-1}z & = 1 \\ x^2yz & = e \\ x^2y^{-1}z^2 & = e^2 \end{cases}$. *en se ramenant à la résolution d'un véritable système linéaire par une tranformation convenable.*

Exercice 11. *Pour* $a, b \in \mathbb{R}$ *on pose* $A_{a,b} = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$.

(1) *Calculer (sous forme factorisée) le déterminant de* $A_{a,b}$.

(2) *Etudier, suivant les valeurs des paramètres* a *et* b*, le rang de* $A_{a,b}$.

(3) *Sans faire calculs, pour quelles valeurs du paramètre réel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *sommes nous assurés que le système linéaire*

$$(\mathscr{S}_\alpha) \ : \quad \begin{cases} \alpha x + y + z + t & = u_1 \\ x + \alpha y + z + t & = u_2 \\ x + y + \alpha z + t & = u_3 \\ x + y + z + \alpha t & = u_4 \end{cases}$$

admet des solutions ***pour tout*** $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$ *?*

(4) *Pour les valeurs des* α *trouvées dans la question précédente, donner la solution du système* $(\mathscr{S}_\alpha)$ *à l'aide de déterminants que l'on ne calculera pas.*

(5) *Discuter de l'allure de l'ensemble des solutions du système* $(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} x + y + z + t & = u_1 \\ x + y + z + t & = u_2 \\ x + y + z + t & = u_3 \\ x + y + z + t & = u_4 \end{cases}$

(6) *Résoudre le système* $(\mathscr{S})$ *lorsqu'il admet des solutions.*

Exercice 12.

(1) *Soit* $z = a + ib \in \mathbb{C}$. *Montrer que* $z\overline{z} = |z|^2$.

(2) *Calculer le déterminant de la matrice* $M_z := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10 - z\overline{z} & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 - (z-2)\overline{(z-2)} \end{pmatrix}$ *où* $z \in \mathbb{C}$.

(3) *Discuter du rang de* M_z *suivant les valeurs de* $z \in \mathbb{C}$.

(4) *Représenter graphiquement l'ensemble* $\mathscr{C}$ *des* $z \in \mathbb{C}$ *tels que* M_z *ne soit pas de rang maximal et préciser l'aire du domaine borné contenant l'origine et délimité par* $\mathscr{C}$.

Fin de l'épreuve

I.N.P. **Mars 2011**

☯ ☢ ☯ **Systèmes et Déterminants – Examen Bis Final.** ☯ ☢ ☯

Mercredi 23 Mars 2011, Examen Final Bis , Durée 1 heure 30, pas de documents, calculatrices, téléphones.

Exercice 13. *Pour $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{R}$ calculer le déterminant de la matrice*

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a \\ a & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Pour quelles valeurs de a est-elle de rang maximal ?

Exercice 14. *Pour $a \in \mathbb{R}$ on pose* $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -1 & a^2 \\ 1 & 1 & -1 & a^2 \end{pmatrix}$.

(1) *Etudier, suivant les valeurs des paramètre réel a le rang de M_a.*

(2) *Pour quelles valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ la matrice M_a est-elle inversible ?*

(3) *Sans faire calculs, pour quelles valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ sommes nous assurés que le système linéaire*

$$(\mathscr{S}_a) \ : \quad \begin{cases} x + a^2y - z + a^2t & = u_1 \\ x + y - z + a^2t & = u_2 \end{cases}$$

*admet des solutions **pour tout** $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$?*

(4) *Pour les valeurs de a trouvées dans la question précédente, discuter de l'allure de l'ensemble des solutions du système $(\mathscr{S}_a)$.*

(5) *Existe-t-il des valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système $(\mathscr{S}_a)$ admet une unique solution ?*

(6) *Résoudre le système* $(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} x + 2y - z + 2t & = 0 \\ x + y - z + 2t & = 0 \end{cases}$

(7) *Résoudre le système* $(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} x + y - z + t & = 2011 \\ x + y - z + t & = 2011 \end{cases}$.

Exercice 15.

(1) *Calculer le déterminant de la matrice* $M_z := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10 - |z|^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 6 - |z-2|^2 \end{pmatrix}$ ***où*** $z \in \mathbb{C}$.

(2) *Discuter du rang de M_z suivant les valeurs de $z \in \mathbb{C}$.*

(3) *Représenter graphiquement l'ensemble $\mathscr{C}$ des $z \in \mathbb{C}$ tels que M_z ne soit pas de rang maximal et préciser l'aire du domaine borné contenant l'origine et délimité par $\mathscr{C}$.*

☯ **Fin de l'épreuve** ☯

3 février 2013 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

☯ ☢ INP, EXAMEN FINAL, Déterminants et Systèmes, 14 Mars 2012. ☢ ☯

ℹ `Durée 1h30, documents, calculatrices, téléphones interdits.`

Exercice 16. *(4 points) Trouver un nombre de trois chiffres sachant que :*

- *La somme des chiffres est égale à 14.*
- *En permutant les chiffre des unités avec celui des dizaines le nombre augmente de 36.*
- *En permutant les chiffre des unités avec celui des centaines le nombre augmente de 297.*

Exercice 17. *(6 points) Soit* $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$*, on note* $-A = ((-a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$*.*

(1) *Exprimer* $\det(-A)$ *en fonction de* $\det(A)$*.*

(2) *Soit* $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* ${}^tA = -A$ *(on dit que* A *est une matrice antisymétrique).*

(a) *Si* n *est* ***impair****, montrer que* $\det(A) = 0$*.*

(b) *On suppose* $n = 2p$ **pair** *et soit* $A = ((a_{ij})) \in M_n(\mathbb{R})$ *définie par :*

$$a_{i,n+1-j} = \begin{cases} 1, & \textit{pour } 1 \leq i \leq p, \\ -1, & \textit{pour } p+1 \leq i \leq 2p = n \end{cases}$$

et tous les autres coefficients sont nuls.

- *Représenter* A *et vérifier qu'elle est antisymétrique.*
- *Calculer son déterminant, conclusion ?*

Exercice 18. *(6 points) On considère les système linéaire*

$$\mathscr{S}_{abc} : \begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice* A *du système et calculer son déterminant.*

(2) *Etudier le rang de* A*.*

(3) *Soit* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *admettant* A *pour matrice dans la base canonique. Montrer que* $\ker\varphi$ *n'est jamais un plan vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*.*

(4) *Pour quels* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *le système est-il de Cramer ?*

(5) *Lorsque le système est de Cramer, exprimer les coordonnées de l'unique solution du système à l'aide de déterminants qu'il est inutile de calculer.*

Exercice 19. *(5 points) Soient* $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

(1) *Calculer* $\det(B)$*.*

(2) *Calculer le produit* AB*.*

(3) *Calculer* $\det(AB)$ *sous forme factorisée.*

(4) *En déduire* $\det(A)$*.*

☯ ☢ Fin de l'épreuve ☢ ☯

☯ ☢ INP, EXAMEN-Bis FINAL, Déterminants et Systèmes, 2012. ☢ ☯

ℹ `Durée 1h30, documents, calculatrices, téléphones interdits.`

Exercice 20. *(4 points) Les deux questions sont indépendantes.*

(1) *Calculer la valeur du déterminant* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

(2) *Calculer la valeur du déterminant* $\begin{vmatrix} 20112012 & 15151516 \\ 20113012 & 15152516 \end{vmatrix}$ *en effectuant au* ***maximum*** ***<u>une</u>*** *multiplication (additions et soustractions sont autorisées).*

Exercice 21. *(4 points) En se ramenant à la résolution d'un système linéaire, trouver un nombre de trois chiffres sachant que :*

- *La somme des chiffres est égale à 7.*
- *En permutant le chiffre des unités avec celui des dizaines le nombre augmente de 63.*
- *En permutant le chiffre des unités avec celui des centaines le nombre augmente de 693.*

Exercice 22. *(6 points) Soit* $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$, *on note* $-A = ((-a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$.

(1) *Exprimer* $\det(-A)$ *en fonction de* $\det(A)$.

(2) *Soit* $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* ${}^tA = -A$ *(on dit que* A *est une matrice antisymétrique).*

(a) *Si* n *est* ***impair***, *montrer que* $\det(A) = 0$.

(b) *On suppose* $n = 2p$ ***pair*** *et soit* $A = ((a_{ij})) \in M_n(\mathbb{R})$ *définie par :*

$$a_{i,n+1-i} = \begin{cases} 2p+1-i, & \text{pour } 1 \leq i \leq p, \\ -(2p+1-i), & \text{pour } p+1 \leq i \leq 2p = n \end{cases}$$

et tous les autres coefficients sont nuls.

- *Représenter* A *et vérifier qu'elle est antisymétrique.*
- *Calculer son déterminant, conclusion ?*

Exercice 23. *(6 points) Soit* $m \in \mathbb{R}$, *on considère le système linéaire*

$$\begin{cases} x + y + z = m+1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice* A_m *du système et calculer son déterminant.*

(2) *Etudier le rang de* A_m *suivant les valeurs du paramètre réel* m.

(3) *Lorsque le système est de Cramer, exprimer les coordonnées de l'unique solution du système à l'aide de déterminants* ***que l'on demande de calculer***.

(4) *Résoudre le système lorsque* $m = 1$.

☯ ☢ Fin de l'épreuve ☢ ☯