I.N.P. 24 octobre 2012

☯ Fonctions d'une Variable Réelle ☯
EXAMEN FINAL.

🛈 Durée 1h30, documents, calculatrices, téléphones interdits.
Les logarithmes sont tous népériens.
Il est attendu des candidat(e)s qu'ils fassent preuve de qualités de rédaction, de clarté et de présentation.

Exercice 1. ***(Cours).*** *(4 points) Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}$.

(1) *Ecrire la définition de « f est injective ».*
(2) *Ecrire la définition de « f est n'est pas surjective ».*
(3) *Ecrire la définition de « f est décroissante ».*
(4) *Ecrire la définition de « f est n'est pas décroissante ».*
(5) *Ecrire la définition de « f est continue au point a ».*
(6) *Ecrire la définition avec les suites de « f n'est pas continue au point a ».*

Exercice 2. *(2 points) Etudier la continuité de la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 3. *(2 points) La fonction définie pour tout* $x \neq 0$ *par*

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin(1012x)} - \sqrt{1-\sin(1012x)}}{x}$$

est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$ *?*

Exercice 4. *(4 points) Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

(1) *Déterminer $f(\mathbb{R})$ (en justifiant ses affirmations).*
(2) *Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.*
(3) *f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$? Atteint-elle ses bornes ?*
(4) *Préciser f^{-1}.*

Exercice 5. *(4 points) Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue vérifiant*

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad f(4024) = 1999.$$

(1) *Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = 1/1999$.*
(2) *Montrer que f prends toutes les valeurs entre $1/1999$ et 1999.*
(3) *Calculer $f(1515)$.*

tournez la page SVP

Exercice 6. *(4 points) Calculer les limites suivantes :*

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty} e^{(e^x)} - (e^e)^x, \qquad (2)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(20x)-\cos(12x)}{16x^2},$$

$$(3)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{2012x})}{x}, \qquad (4)\quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin(2012\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

☯ ☢ Fin de l'épreuve ☢ ☯

24 octobre 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr

Corrigé.

Corrigé de l'exercice 1 : C'est le cours...

Corrigé de l'exercice 2 : Pour $x \neq 0$ nous avons

$$f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x+1, & \text{si } x > 0, \\ x-1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0_-} f(x)$ et f n'a pas de limite en 0, il est donc sans espoir de l'y prolonger continuement. Sur $\mathbb{R}^\star$ elle est bien entendu continue d'après les formules ci-dessus.

Corrigé de l'exercice 3 : En multipliant par la quantité conjugué :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(2012x)} - \sqrt{1-\sin(2012x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(2012x)}{x[\sqrt{1+\sin(2012x)} + \sqrt{1-\sin(2012x)}]} = \frac{2\cdot 2012}{2} = 2012.$$

Par conséquent, si on pose $f(0) = 2012$ on prolonge continuement f en l'origine.

Corrigé de l'exercice 4 : • f est clairement continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues, celle du dénominateur ne s'annulant pas. Nous avons

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{x}{1-x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, la valeur absolue n'est pas dérivable à l'origine et par suite la dérivabilité de f en 0 est douteuse (en fait, f est dérivable en 0), donc pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2} > 0, & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{(1-x)^2} > 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et sur $\mathbb{R}_-^\star$, étant continue à l'origine elle sera strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc injective. Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle, et finalement $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
• f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.
• $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ assure que f est bornée avec $\sup_{\mathbb{R}} f(x) = 1$, $\inf_{\mathbb{R}} = -1$. Ces bornes ne sont pas atteintes vu les variations de f.
• On vérifie sans peine avec la première formule que

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|} = \begin{cases} \frac{y}{1-y}, & \text{si } 0 \leq y < 1, \\ \frac{y}{1+y}, & \text{si } -1 < y < 0. \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 5 :

(1) Pour $x = 4024$ on a $f(4024)f(f(4024)) = 1999f(1999) = 1$ soit $f(1999) = 1/1999$.

(2) $f(4024) = 1999$ et $f(1999) = 1/1999$; étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que f prendra toutes les valeurs entre 1/1999 et 1999.

(3) Vu (2), il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = 1515$. Alors on aura $f(b)f(f(b)) = 1515f(1515) = 1$ soit $f(1515) = 1/1515$ (en fait, toute fonction qui sur l'image $f(\mathbb{R})$ vérifie $f(t) = 1/t$ convient, dans la figure ci-dessous j'ai dessiné une telle solution... à suivre...).

Corrigé de l'exercice 6 : • Ecrivons $e^{(e^x)} - (e^e)^x = e^{(e^x)} - e^{xe} = e^{(e^x)}\left[1 - e^{xe-e^x}\right]$. Comme $\lim_{+\infty} xe - e^x = -\infty$, on aura $\lim_{+\infty}\left[1 - e^{xe-e^x}\right] = 1$ si bien que d'après les opérations sur les limites $\lim_{+\infty} e^{(e^x)} - (e^e)^x = +\infty$.
• Avec les formule bien connues $\cos p - \cos q = -2\sin(p+q/2)\sin(p-q/2)$ et $\lim_0 \sin(u)/u = 1$ nous avons $\frac{\cos(20x)-\cos(12x)}{16x^2} = -2\frac{\sin(\frac{20x+12x}{2})\sin(\frac{20x-12x}{2})}{16x^2} = -2\frac{\sin((16x)\sin(4x)}{16x^2} \underset{x\to 0}{\to} -8$.
• $\frac{\ln(1+e^{2012x})}{x} = \frac{2012x+\ln(1+e^{-2012x})}{x} = 2012 + \frac{\ln(1+e^{-2012x})}{x} \underset{x\to 0}{\to} 2012 + 1 = 2013$ puisque $\lim_0 \ln(1+u)/u = 1$.
• On se ramène en 0 en posant $x = 1+h$: $\frac{\sin(2012\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin(2012\pi+2012\pi h)}{\sin(\pi+\pi h)} = -\frac{\sin(2012\pi h)}{\sin(\pi h)} \underset{x\to 0}{\to} -2012$ puisque $\lim_0 \sin(u)/u = 1$.

Fin du corrigé