I.N.P. **Octobre 2012**

☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle – Feuille d'Exercices 4. ☯ ☢ ☯

Devoir 4 (à rendre le mercredi 10 octobre en TD).

On se propose de démontrer [théorème des cordes universelles de Paul Levy, 1935] que les réels de la forme $1/n,\ n\in\mathbb{N}^\star$ sont les seuls ayant la propriété suivante : « pour toute fonction $f\in\mathscr{C}^0([0,1])$ telle que $f(0)=f(1)$ et tout $n\in\mathbb{N}^\star$, il existe $x_n\in[0,1]$ tel que $f(x_n+1/n)=f(x_n)$ ».

(1) Soit $f\in\mathscr{C}^0([0,1])$ telle que $f(0)=f(1)$, supposons qu'il existe $n\geq 1$ tel que $g(x):=f(x)-f(x+1/n)\neq 0$ pour tout $x\in[0,1]$; en considérant $\sum_{k=0}^{n-1}g(k/n)$ montrer que la condition est nécessaire.

(2) En considérant $f(x)=\sin^2(\pi x/r)-x\sin^2(\pi/r)$, montrer que la condition est suffisante.

Exercice 1. *Déterminer toutes les applications* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *vérifiant* $f(x)^2=1,\ x\in\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Soit* $f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$*. Montrer qu'étant donnés* $x_1,x_2,\dots,x_n\in[a,b]$ *il existe* $x_0\in[a,b]$ *tel que*

$$f(x_0)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

Exercice 3. *Soit* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, si* f *est périodique de période* $T>0$*, montrer qu'il existe* $x_0\in\mathbb{R}$ *tel que* $f(x_0+T/2)=f(x_0)$.

Exercice 4. *Soit* $f:[0,1]\to[0,1]$ *une fonction continue. En considérant la fonction* $g(x)=f(x)-x$*, montrer qu'il existe* $x_0\in[0,1]$ *tel que* $f(x_0)=x_0$*. Illustrez graphiquement ce résultat.*

Exercice 5. *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *continue et injective ; montrer que* f *est soit strictement croissante soit strictement décroissante. En déduire qu'il n'existe pas de fonction* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *vérifiant* $(f\circ f)(x)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Exercice 6. *On cherche toutes les fonctions* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *vérifiant* $(f\circ f)(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$*. Pour cela on pose* $\mathscr{E}:=\{x\in\mathbb{R}\ :\ f(x)=x\}$ *; montrer successivement que* $\mathscr{E}$ *est non vide puis égal à* $f(\mathbb{R})$*. En déduire une méthode pour construire des solutions de l'équation fonctionnelle.*

Exercice 7. *Déterminer toutes les fonctions* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *vérifiant* $(f\circ f\circ f)(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Exercice 8. *Montrer que toute bijection* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ *possède une infinité de points de discontinuité.*

Exercice 9. *Montrer qu'il n'existe pas de fonction* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *prenant exactement deux fois chaque valeurs.*

Exercice 10. *Existe t'il une fonction continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *envoyant les rationnels dans les irrationnels et réciproquement ? Même question sans l'hypothèse de continuité.*

Exercice 11. *Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est au plus dénombrable.*

Exercice 12. *Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *vérifiant*

$$f(x)\in\mathbb{Q}\quad\Longleftrightarrow\quad f(x+1)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

Exercice 13. *Montrer qu'il n'existe pas d'application confinue et surjective* $f : [0,1] \to]0,1[$. *Trouver une application* $f :]0,1[\to [0,1]$ *continue et surjective et montrer qu'un tel exemple ne peut être bijectif.*

Exercice 14. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application continue envoyant les intervalles ouverts sur les intervalles ouverts. Montrer que* f *est strictement monotone.*

Exercice 15. *Vendredi à 6h00, le Lama Delon quitte la vallée pour rejoindre la Lamasserie dans la montagne. Le lendemain, à 6h00 il fait le trajet inverse et le retour dure exactement le même temps que l'aller. Montrer qu'il existe alors forcément un endroit sur le trajet en lequel le Lama Delon passe à l'aller et au retour à la même heure.*

Exercice 16. *Un coureur à pied parcourt (continument) 6km en 30 minutes. Montrer qu'à un moment dans sa course il court 1km en exactement une minute.*

Exercice 17. • *Etudier la continuité la continuité uniforme sur l'intervalle* $]0,1]$ *des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \log(x), \qquad f(x) = cotan(x), \quad f(x) = e^x \cos(1/x), \quad f(x) = e^{1/x}, \qquad f(x) = \cos(x)\cos(\pi/x).$$

• *Etudier la continuité la continuité uniforme sur l'intervalle* $[0,+\infty[$ *des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = x\sin(x), \quad f(x) = \sin^2(x), \quad f(x) = \sin(x^2), \quad f(x) = \sin(\sqrt{x}).$$

Exercice 18. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *admettant une limite finie en* $+\infty$ *et* $-\infty$. *Montrer que* f *est bornée. Atteint-elle nécessairement ses bornes ? Si de plus* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ *montrer que* f *atteint au moins une de ses bornes.*

Exercice 19. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *admettant une limite finie en* $+\infty$ *et* $-\infty$. *Montrer que* f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 20. *Etudier la continuité la continuité uniforme sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction* $f(x) = arctan(x)$ *et de* $f(x) = x\sin(1/x)$ *sur* $[0,+\infty[$.

Exercice 21. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *si* f *est périodique montrer que* f *est uniformément continue, bornée et atteint ses bornes ; montrer aussi que pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *il existe* $x_a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x_a + a) = f(a)$.

Exercice 22. *Montrer que la fonction* $f(x) = \cos(x^2)$ *n'est pas uniformément continue, en déduire qu'elle ne peut être périodique (voir aussi l'exercice 5 de la feuille 1).*

Exercice 23. *Soit* f, g *deux fonctions uniformément continues sur* $[a,b]$ *(resp.* $[a,+\infty[$*). Cela implique-t-il la continuité uniforme sur* $[a,b]$ *(resp.* $[a,+\infty[$*) des fonctions* $f+g$, fg, $x \mapsto f(x)\sin(x)$ *?*

Exercice 24. *Soient* $f, g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *; si* f *est bornée montrer que* $f \circ g$ *et* $g \circ f$ *sont bornées.*

23 septembre 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr