I.N.P. Septembre/Octobre 2012

☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle – Feuille d'Exercices 3. ☯ ☢ ☯

Devoir 3 (à rendre en Cours le mardi 2 octobre).

Soit $a \in [0,1]$. On se propose de déterminer les applications $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues à l'origine et vérifiant $f(x) - 2f(ax) + f(a^2x) = x^2$ pour tout réel x.

(1) Montrer que ce problème n'a pas de solutions si $a = 1$.

On suppose désormais $0 < a \leq 1$ *et soit* f *une solution.*

(2) Soit $n \geq 1$, en écrivant l'égalité vérifiée par f successivement pour $x, ax, a^2x, \dots, a^nx$, montrer que $f(x) - f(ax) - f(a^{n+1}x) + f(a^{n+2}x) = x^2 \sum_{k=0}^n a^{2k} = \frac{x^2(1-a^{2n+2})}{1-a^2}$.

(3) En déduire que $f(x) - f(ax) = \frac{x^2}{1-a^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(4) Montrer que $f(x) - f(a^{n+1}x) = \frac{x^2}{1-a^2} \sum_{k=0}^n a^{2k} = \frac{x^2(1-a^{2n+2})}{(1-a^2)^2}$.

(5) En déduire que $f(x) = \frac{x^2}{(1-a^2)^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(6) Conclure.

Exercice 1. (1) *Calculer pour* $a > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *:* $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$..

(2) *Calculer pour* $\alpha \in \mathbb{R}$ *:* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha},\ \lim_{x\to0_+} x^\alpha \log(x),$.

(3) *Montrer que* $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to0} (1+x)^{1/x} = e$.

(4) *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x},\ (a>0),\quad \lim_{x\to0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x},\ (\alpha \in \mathbb{R}),\quad \lim_{x\to0_+} x^{\sin(x)}\quad \lim_{x\to+\infty} (\log x)^{1/x}, \lim_{x\to0} (\cos x)^{1/\sin^2(x)},$$
$$\lim_{x\to+\infty} (e^x-1)^{1/x}.$$

Exercice 2. *Soit* $f\ :\ \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^\star_+$ *; montrer que :* $\lim_{x\to0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = 2 \implies \lim_{x\to0} f(x) = 1$.

Exercice 3. *Soit* $f\ :\ ]0,1[\to \mathbb{R}$ *vérifiant :* $\lim_{x\to0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(x/2)}{x} = 0$. *On se propose de montrer que* $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

(1) *Montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\eta > 0$ *tel que* $0 < x < \eta$ *implique* $|f(x/2^{n-1}) - f(x/2^n)| < \varepsilon x/2^{n-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$.

(2) *En déduire que* $|f(x) - f(x/2^m)| \leq 2\varepsilon x(1-2^{-m})$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}^\star$.

(3) *Conclure.*

Exercice 4. *Soient* $f(x) = \sin(x), g(x) = x - E(x),\ x \in \mathbb{R}$. *Montrer que* f *et* g *sont périodiques mais que* $h = f + g$ *ne l'est pas.*

Exercice 5. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *vérifiant pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:* $f(x^2) = f(x)$. *Montrer que* f *est constante.*

Exercice 6. *Déterminer toutes les applications* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *vérifiant* $f(x)+f(2x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. *On se propose de déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues et vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy :* $(\mathscr{E}) \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

0) Montrer que $(\mathscr{E})$ *admet des solutions.*

Soit f *une solution de* $(\mathscr{E})$

1) Montrer que f *est impaire.*

2) Montrer que $f(nx) = nf(x),\ \forall\, x \in \mathbb{Z}$.

4) Montrer que $f(rx) = rf(x),\ \forall\, x \in \mathbb{Q}$.

3) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) = ax,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ *(vous pouvez utiliser le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels).*

🛈 *Pour la culture* $(\mathscr{E})$ *admet aussi des solutions discontinues... mais c'est une autre histoire...*

Exercice 8. • *Montrer que l'équation* $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $]-1, 1[$ *; même question pour* $x^{29} + 14x^{17} - 7x^5 + 2 = 0$.

• *Montrer que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Exercice 9. *Déterminer toutes les applications* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *vérifiant* $f(x)^2 = 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *si* f *est périodique de période* $T > 0$, *montrer qu'il existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x_0 + T/2) = f(x_0)$.

Exercice 11. *Soit* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *une fonction continue. En considérant la fonction* $g(x) = f(x) - x$, *montrer qu'il existe* $x_0 \in [0, 1]$ *tel que* $f(x_0) = x_0$. *Illustrez graphiquement ce résultat.*

27 septembre 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr