**I.N.P.** **Septembre 2012**

## ☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle, limites – Feuille d'Exercices 2. ☯ ☢ ☯

### Devoir 2 (à rendre en TD le Vendredi 21/09).

**Exercice 1.** *Déterminer les limites :* $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ *(idem en* $-\infty$*),* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0_+}\sqrt{x}E(x^{-1})$, $\lim_{x\to 0}x^2\left(1+2+3+\cdots+E\left(|x|^{-1}\right)\right)$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(x)}{x+2}$.

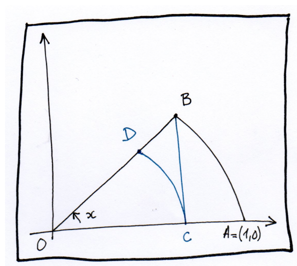
**Exercice 2.** *Montrer avec « les* $\varepsilon$ *et* $\eta$ *» que :*

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x+1}=\sqrt{2},\qquad \lim_{x\to+\infty}e^{-x+\pi}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}e^{x+\pi}=+\infty.$$

.

**Exercice 3.** *La fonction* $f(x)=\sin(x^2)$ *est-elle périodique ?*

**Exercice 4.** *On définit pour* $x\in\mathbb{R}$ *la fonction sinus de manière trigonométrique (voir figure) but de cet exercice est de montrer « proprement » la formule classique* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.




*En observant bien la figure, montrer que*

$$\frac{x\cos^2(x)}{2}\le\frac{\sin(x)\cos(x)}{2}\le\frac{x}{2},\quad \forall\, 0<x<\pi/2.$$

*(« rappel » : l'aire d'un secteur angulaire d'angle* $\alpha$ *et de rayon* $r$ *est* $\alpha r^2/2$*) et conclure. En déduire la dérivée des fonctions sinus et cosinus.*

**Exercice 5.** *Que dire des fonctions* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *vérifiant une des conditions ci-dessous ?*

*a)* $\forall\eta>0,\ \exists\varepsilon>0\ :\ |x-2|<\eta\implies|f(x)-3|<\varepsilon.$
*b)* $\exists\varepsilon>0,\ \forall\eta>0\ :\ |x-2|<\eta\implies|f(x)-3|<\varepsilon.$
*c)* $\exists\varepsilon>0,\ \exists\eta>0\ :\ |x-2|<\eta\implies|f(x)-3|<\varepsilon.$
*d)* $\forall\varepsilon>0,\ \forall\eta>0\ :\ |x-2|<\eta\implies|f(x)-3|<\varepsilon.$
*e)* $\exists\eta>0,\ \forall\varepsilon>0\ :\ |x-2|<\eta\implies|f(x)-3|<\varepsilon.$
*f)* $\exists A\in\mathbb{R},\ \forall B>0\ :\ x>B\implies f(x)>A.$
*g)* $\forall B>0,\ \exists A\in\mathbb{R}\ :\ x>B\implies f(x)>A.$
*h)* $\forall A\in\mathbb{R},\ \exists\varepsilon>0 x<A\implies|f(x)-1|<\varepsilon.$
*i)* $\forall A\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0 x<A\implies|f(x)-1|<\varepsilon.$

**Exercice 6.** (1) *Calculer les limites suivantes, ou prouver quelles n'existent pas :*

$$\lim_{x\to 0} x\cos(1/x),\ \lim_{x\to 0} xE(1/x),\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos(x))}{\sin(\sin x)}, \lim_{x\to 0}\frac{E(x)}{x}, \lim_{x\to 0} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+1}\right).$$

(2) *Pour* $a\in\mathbb{R}$ *calculer* $\lim_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}$, *puis* $\lim_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a},\ n\geq 4.$

(3) *Calculer les limites suivantes : Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x\sin(\sin(x))},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin(\tan(\sin(x^2))))}{\sin(x^2)},\ \lim_{x\to 0_+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{\sin(x)}}$$

**Exercice 7.** • *Montrer avec « les $\varepsilon$ et $\eta$ » que :*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1,\qquad \lim_{x\to 0_+}\sqrt{x}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}e^{-x+\pi}=0.$$

.

• *Pour* $a\in\mathbb{R}$ *calculer* $\lim_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}$, *puis* $\lim_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a},\ n\geq 4.$

• *Montrer que tout fonction* $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *périodique et admettant une limite finie en* $+\infty$ *est constante.*

• *Soit* $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *vérifiant* $\lim_{+\infty}f(x)=+\infty$ *et* $g\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction bornée ; que dire de* $\lim_{+\infty}f(x)g(x)$ *et* $\lim_{+\infty}f(x)+g(x)$ *?*

**Exercice 8.** *Soit* $f(x)=\begin{cases}\sin(x^{-1}), & si\ x\in\mathbb{R}^\star\\ 0, & si\ x=0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}0, & si\ x\in\mathbb{Q}\\ 1, & si\ x=0\end{cases}$, $f_1(x)=xf(x), g_1(x)=xg(x)$. *Etudier les limites à l'origine de ces fonctions et esquisser leur graphe...*

**Exercice 9.** *Déterminer les limites suivantes ou justifier leur non-existence :*

$$\lim_{x\to 0}x\cos(x^{-1}),\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}, \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x},$$
$$\lim_{x\to\alpha_+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}},\ (\alpha\geq 0),\ \lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6}.$$

9 septembre 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr