Devoir 1 (à rendre en cours mercredi 14/09/2012).

(1) Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall\,(a,b) \in A\times B \ : \ a \leq b$. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et vérifient $\sup A \leq \inf B$.

(2) Si $A \subset \mathbb{R}$ est majorée, montrer que sa borne supérieure est unique.

(3) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On désigne par $E = \{x \in [0,1]; f(x) \geq x\}$. Montrer que E admet une borne supérieure b et prouver que $f(b) = b$.

(4) Montrer pour tout $x, y \in \mathbb{R}$: $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$

Exercice 1. *f désigne une application de E dans F. A est un sous-ensemble non vide de E et B un sous-ensemble non-vide de F. Justifier les inclusions*

(1) $f(f^{-1}(B)) \subset B$;

(2) $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(3) *A-t-on égalité en général ?*

Exercice 2. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose $\mathscr{E}_n := \{k + \frac{k}{n},\ k \in \mathbb{N}^\star\}$. Montrer que $\mathscr{E}_n$ est minoré et $\inf \mathscr{E}_n := \inf\{k + \frac{k}{n},\ 1 \leq k \leq n\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\inf \mathscr{E}_n \geq \sqrt{4n}$ et étudier les cas d'égalité.*

Exercice 3. • *Soit $\mathscr{S} \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide tel que $\sup \mathscr{S} \notin \mathscr{S}$. Soit $x < \sup \mathscr{S}$, montrer qu'il existe une infinité d'éléments de $\mathscr{S}$ entre x et $\sup \mathscr{S}$.*

• *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie majorée. Si $\sup(A) > 0$ montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $a > 0$.*

• *Si a et b sont deux réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $b < x \implies a < x$, alors $a \leq b$.*

• *Soient A, B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est non vide et bornée et préciser $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$.*

• *Si $B \subset A$ et A bornée Montrer que B est bornée et comparer $\sup A, \sup B, \inf A, \inf B$.*

• *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble. Montrer que maxA est défini de manière unique s'il existe. Montrer que maxA existe si et seulement si $\sup A \in A$. Dans ce cas maxA $= \sup A$. Enoncer une propriété analogue pour l'inf et le min.*

Exercice 4. • *Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont elles-minorées, majorées ? Dans chaque cas, déterminer s'il y a lieu la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.*

$$A = \left\{\frac{n}{mn+1};\ (m,n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}, \qquad B = \left\{\frac{n}{mn+1};\ (m,n) \in \mathbb{N}^{2}\right\}.$$

• *Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures, inférieures.*

1. $\{a + bn;\ n \in \mathbb{N}\}$ **2.** $\{a + (-1)^n b;\ n \in \mathbb{N}\}$

3. $\{a + b/n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ **4.** $\{(-1)^n a + b/n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$

5. $\{a + (-1)^n b/n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 5. *Soient $f, g \ : \ X \to \mathbb{R}$ deux fonctions majorées sur X. Montrer que $\sup_{x\in X} f(x) + g(x) \leq \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x)$. En considérant $f(x) = \sin(x),\ g(x) = \cos(x), X = \mathbb{R}$ montrer que l'inégalité peut parfois être stricte. Ceci est-il en contradiction avec l'égalité vue en cours : $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$?*

Exercice 6. *Pour $x \in \mathbb{R}$ on admet qu'il existe un unique entier relatif n vérifiant $n \leq x \leq n+1$. C'est la partie entière de x, on la note $E(x)$. Montrer que :*
• $x \leq y \implies E(x) \leq E(y)$.
• $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
• $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ x \in \mathbb{R}\ :\ E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.
• *Montrer que* $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star\ :\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1/2\sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. *En déduire la partie entière de* $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)$.

Exercice 7. • *Si* $f\ :\ A \to \mathbb{R}$ *est impaire et* $0 \in A$ *montrer que* $f(0) = 0$.
• *Montrer que toute fonction* $f\ :\ A \to \mathbb{R}$ *se décompose de manière unique sous la forme* $f = g + h$ *avec* g *paire et* h *impaire.*

Exercice 8. *Les fonctions* $f(x) = \cos(x^2)$ *et* $g(x) = \sin(x^2)$ *sont-elles périodiques ?*

Exercice 9. *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 1$ *si* $x \in \mathbb{Q}$ *et* $f(x) = 0$ *si* $\notin \mathbb{Q}$ *quel est l'ensemble des périodes de* f *?*

Exercice 10. *Soient* $f(x) = \sin(x), g(x) = x - E(x),\ x \in \mathbb{R}$. *Montrer que* f *et* g *sont périodiques mais que* $h = f + g$ *ne l'est pas.*

Exercice 11. • *Soient* E, F, G *trois ensembles et* $f\ :\ E \to F, g\ :\ F \to G$. *Si* $g \circ f$ *est injective montrer que* f *est injective. Si* $g \circ f$ *est surjective montrer que* g *est surjective.*
• *Montrer que la composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).*
• *La somme, le produit de deux injections (resp. surjections, bijections) est-elle encore une injection (resp. surjection, bijection) ?*

Exercice 12. *Soit* $f\ :\ E \to F$ *une application. Montrer les équivalences :*
• $(\forall\, X \in \mathscr{P}(E)\ :\ f^{-1}(f(X)) = X) \iff (f$ *est injective* $)$.
• $(\forall\, Y \in \mathscr{P}(F)\ :\ f(f^{-1}(Y)) = Y) \iff (f$ *est surjective* $)$.

Exercice 13. *Soit* $f : E \to F$. *Montrer que* f *est bijective si et seulement si, pour tout* A *de* $\mathcal{P}(E)$, *on a* $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ ($\overline{A}$ *désigne le complémentaire de* A).

Exercice 14. *Soient* E *un ensemble,* $\mathscr{P}(E)$ *l'ensemble de ses parties, et* A *et* B *deux parties de* E. *On définit*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ & X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

(1) *Montrer que* f *est injective si et seulement si* $A \cup B = E$.
(2) *Montrer que* f *est surjective si et seulement si* $A \cap B = \varnothing$.
(3) *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* A *et* B *pour que* f *soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.*

Exercice 15. *Soit* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$, $(n, p) \mapsto 2^n(2p+1)$. *Démontrer que* f *est une bijection. En déduire une bijection de* $\mathbb{N}^2$ *sur* $\mathbb{N}$ *puis une bijection de* $\mathbb{Q}$ *sur* $\mathbb{N}$.

29 août 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr