☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle – Corrigé du Devoir 4. ☯ ☢ ☯

On se propose de démontrer [théorème des cordes universelles de Paul Levy, 1935] que les réels de la forme $1/n,\ n \in \mathbb{N}^\star$ sont les seuls ayant la propriété suivante : « pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ telle que $f(0) = f(1)$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $f(x_n + 1/n) = f(x_n)$ ».

(1) Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ telle que $f(0) = f(1)$, supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $g(x) := f(x) - f(x + 1/n) \neq 0$ pour tout $x \in [0,1]$; en considérant $\sum_{k=0}^{n-1} g(k/n)$ montrer que la condition est nécessaire.

(2) En considérant $f(x) = \sin^2(\pi x/r) - x\sin^2(\pi/r)$, montrer que la condition est suffisante.

Solution :

(1) g continue, est sans zéros sur $[0,1]$ donc de signe constant, par exemple strictement positive ; mais par télescopage : $0 < \sum_{k=0}^{n-1} g(k/n) = f(1) - f(0) = 0$ c'est absurde : la condition est nécessaire.

(2) $f(x+r) = f(x)$ implique $r\sin^2(\pi/r) = 0$ soit $r = 1/m$ avec $m \in \mathbb{N}^\star$. La condition est suffisante. ■

25 septembre 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr