☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle – Corrigé du Devoir 2. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Déterminer les limites :* $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ *(idem en* $-\infty$*),* $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x}$, $\lim_{x\to0_+}\sqrt{x}E(x^{-1})$, $\lim_{x\to0}x^2\left(1+2+3+\cdots+E\left(|x|^{-1}\right)\right)$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(x)}{x+2}$.

• $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$.
• $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x\geq\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$.
• $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x/2)}{x/2}=0$ ou bien y reconnaitre moins le taux d'accroissement de sin en 0.
• Pour tout $x>0$ nous avons $x^{-1}-1<E(x^{-1})\leq x^{-1}$ donc $x^{-1/2}-\sqrt{x}<E(x^{-1})\leq x^{-1/2}$ et par encadrement $\lim_{x\to0_+}\sqrt{x}E(x^{-1})=+\infty$.
• Avec la formule bien connue $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ nous pouvons écrire $\lim_{x\to0}x^2(1+2+3+\cdots+E(|x|^{-1}))=\lim_{x\to0}x^2\cdot\frac{E\left(|x|^{-1}\right)[E\left(|x|^{-1}\right)+1]}{2}=\lim_{x\to0}\frac{xE\left(|x|^{-1}\right)[xE\left(|x|^{-1}\right)+x]}{2}=1/2$ car $x^{-1}-1<E(x^{-1})\leq x^{-1}$ implique $1-x<xE(x^{-1})\leq1$ pour tout $x>0$ et par suite (gendarmes) : $\lim_{x\to0}xE\left(|x|^{-1}\right)=1$.
• $\leq|\cos(x)/x|\leq1/x$ implique $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(x)}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos(x)/x}{1+2/x}=1$. ■

Exercice 2. *Montrer avec « les ε et η » que :*

$$\lim_{x\to1}\sqrt{x+1}=\sqrt{2},\qquad\lim_{x\to+\infty}e^{-x+\pi}=0,\qquad\lim_{x\to+\infty}e^{x+\pi}=+\infty.$$

.

• On se ramène en 0 en posant $x=2+h$: $\lim_{x\to1}\sqrt{x+1}-\sqrt{2}=0=\lim_{h\to0}\sqrt{2+h}-\sqrt{2}$. Il s'agit donc de montrer que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\eta>0$ tel que $|h|<\eta$ implique $|\sqrt{2+h}-\sqrt{2}|<\varepsilon$. Pour cela, observons que $|\sqrt{2+h}-\sqrt{2}|=\frac{|h|}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}\leq|h|/\sqrt{2}$. Il en résulte que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\eta=\sqrt{2}\varepsilon>0$ tel que $|h|<\eta$ implique $|\sqrt{2+h}-\sqrt{2}|<\varepsilon$. CQFD.
• Vu le cours, nous devons montrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $A_\varepsilon>0$ tel que $x>A_\varepsilon$ implique $|e^{-x+\pi}|=e^{-x+\pi}<\varepsilon$. Soit donc $\varepsilon>0$: $e^{-x+\pi}<\varepsilon$ équivaut à $e^{-x}<\varepsilon e^{-\pi}$ soit $-x<\log(\varepsilon e^{-\pi})$ ou $x>-\log(\varepsilon e^{-\pi})=\log(e^{\pi}/\varepsilon):=A_\varepsilon$. Ainsi pour tout $\varepsilon>0$, il existe $A_\varepsilon=\log(e^\pi/\varepsilon)>0$ tel que $x>A_\varepsilon$ implique $|e^{-x+\pi}|=e^{-x+\pi}<\varepsilon$, CQFD. (observez bien que A_ε tends vers l'infini lorsque ε tends vers 0)
• Pour la dernière limite nous devons montrer que pour tout $A>0$, il existe $B_A>0$ tel que $x>B_A$ implique $|e^{x+\pi}|>A$. Soit $A>0$, $|e^{x+\pi}|>A$ équivaut à $x>\log(Ae^{-\pi})$: il faut donc choisir $B_A=\log(Ae^{-\pi})$. ■

Exercice 3. *La fonction $f(x)=\sin(x^2)$ est-elle périodique ?*

Quoique d'apparence élémentaire, c'est une question délicate. Voici quatre solutions, pour comprendre la troisième il faut attendre la fin de ce module.

• $f(x)=0$ équivaut à $x=\pm\sqrt{k\pi},\ k\in\mathbb{Z}$. Si f est périodique soit $T>0$ sa période (T est strictement positive car comme f est continue $T=0$ implique $f\equiv0$...) on a $f(T)=f(T+0)=f(0)=0$: il existe donc $k_0\in\mathbb{N}^\star$ tel que $T=\sqrt{k_0\pi}$. Observons aussi que ni $\sqrt{\pi}$ ni $\sqrt{2\pi}$ ne sont égaux à T car $f(\sqrt{\pi}+\sqrt{2\pi})=-\sin(2\sqrt{2}\pi)\neq0$. On aura aussi $f(T+\sqrt{\pi})=f(\sqrt{\pi})=0$ soit $\sqrt{k_0\pi}+\sqrt{\pi}=\sqrt{k\pi}$ où $k\in\mathbb{Z}$, donc en élevant au carré $k_0+1+2\sqrt{k_0}=k$: on a donc $k_0=q^2$ avec $q\in\mathbb{Q}$. Maintenant si on fait $f(T+\sqrt{2\pi})=f(\sqrt{2\pi})=0$ il vient de la même manière $1+2\sqrt{2k_0}=k'$ soit $2k_o=q'^2,\ q\in\mathbb{Q}$. Mais les égalités $2k_o=q'^2$ et $k_0=q^2$ sont incompatibles car elles assurent que $\sqrt{2}=p'/p\in\mathbb{Q}$ ce qui est notoirement faux.

• (plus simple, mais il fallait y penser !) les zéros positifs de f sont $x_k := \sqrt{k\pi},\ \ k \in \mathbb{N}$, et l'écart entre deux zéros successifs est $x_{k+1} - x_k = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ qui tends vers zéro (lorsque k tends vers l'infini) comme $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}$; en particulier, si f est T-périodique, le nombre de zéros de f dans l'intervalle de longueur T : $[\sqrt{k\pi}, \sqrt{k\pi}+T]$ tends vers l'infini avec k (utiliser l'équivalent ci-dessus qui nous dit qu'il est de l'ordre de $\frac{2T\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}}$ ou bien résoudre $\sqrt{m\pi} < \sqrt{k\pi}+1...$) mais tout cela est absurde car si f est T-périodique son nombre de zéros dans $[\sqrt{k\pi}, \sqrt{k\pi}+T]$ est le même que dans $[0, T]$ et est donc fini : f n'est donc pas périodique. CQFD.

• Toute fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. La fonction continue $f(x) = \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (considérer $|f(x_n) - f(x_{n+1})|$ où $x_n = \sqrt{2n\pi}...$) elle ne peut donc être périodique.

• On vérifie facilement que si f est une fonction dérivable T-périodique, alors f' est encore T-périodique. Supposons $f(x) = \sin(x^2)$ T-périodique, alors $f'(x) = 2x\cos(x^2) + \sin(x^2)$ l'est aussi mais ceci est absurde car $f'(\sqrt{2n\pi}) = 2\sqrt{2n\pi}$ et f' n'est donc pas bornée sur $\mathbb{R}$. ■

 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr