Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall\,(a,b)\in A\times B\ :\ a\leq b$. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et vérifient $\sup A\leq\inf B$.

Soit $b\in B$. Nous avons $a\leq b$ pour tout $a\in A$. Donc A est majoré par b soit $\sup(A)\leq b$. Mais cette dernière inégalité est vraie pour tout $b\in B$: donc B est minoré par $\sup(A)$: $\sup(A)\leq\inf(B)$. ■

Si $A\subset\mathbb{R}$ est majorée, montrer que sa borne supérieure est unique.

Sinon A admet deux bornes supérieures, disons $\alpha<\beta\leq+\infty$. dans ce cas on aura $a\leq\alpha<\beta\leq+\infty$ pour tout $a\in A$, ce qui prouve que β n'est pas le plus petit des majorants. Contradiction, CQFD. ■

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une application croissante. On désigne par $E=\{x\in[0,1];f(x)\geq x\}$. Montrer que E admet une borne supérieure b et prouver que $f(b)=b$.

• On commence par observer que $f(0)\geq 0$, donc E n'est pas vide ; puis que $E\subset[0,1]$ donc E est majoré par 1, il admet donc (c'est le cours) une borne supérieure $b\in[0,1]$.

• $b=0$ implique $E=\{0\}$ qui implique à son tour $f(x)<x$ pour tout $x\in]0,1]$ (car $x>0$ n'est pas dans E) . f étant croissante, $f(0)<f(x)<x$ pour tout $x\in]0,1]$ soit $f(0)=0$.

• Supposons donc $b>0$. Alors pour tout $0<\varepsilon<b$ il existe $x_\varepsilon\in E : b-\varepsilon<x_\varepsilon\leq b$, soit par croissance de f : $f(b-\varepsilon)\leq f(x_\varepsilon)\leq f(b)$. Mais $x_\varepsilon\in E$ donc $b-\varepsilon\leq x_\varepsilon\leq f(x_\varepsilon)\leq f(b)$. On vient donc de montrer que pour tout $0<\varepsilon<b : b-\varepsilon\leq f(b)$ soit $b\leq f(b)$ et $b=\sup(E)\in E$ (c'est donc un max). Supposons que $b<f(b)$ par croissance de f on aura $f(b)\leq f(f(b))$ qui implique que $f(b)\in E$ ce qui est absurde puisque $b<f(b)$ et $b=\sup(E)$. Donc $f(b)=b$. ■

Montrer pour tout $x,y\in\mathbb{R}$: $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|}\leq\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}$

Une étude élémentaire montre que la fonction $\varphi(t):=\frac{t}{1+t}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par l'inégalité triangulaire, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\frac{|x+y|}{1+|x+y|}&=\varphi(|x+y|)\leq\varphi(|x|+|y|)=\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}\\&=\frac{|x|}{1+|x|+|y|}+\frac{|y|}{1+|x|+|y|}\leq\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}\end{aligned}$$

CQFD. ■

15 septembre 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr