Exercice 1. *Déterminer, parmi les fonctions suivantes, celles qui sont dans $L^1(I)$.*

$$
\begin{array}{llll}
(1) & f(t)=\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}},\ I=]0,1[, & (2) & f(t)=\frac{\cos(1/t)}{t},\ I=\mathbb{R}_+,\\
(3) & f(t)=\frac{\sin(1/t)}{t},\ I=\mathbb{R}_+, & (4) & f(t)=\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}},\ I=]0,1[,\\
(5) & f(t)=\frac{(\sin t)^2}{t\ln(t)},\ I=]1,+\infty[, & (6) & f(t)=\frac{\sin(t)}{t}\left(1+\frac{\sin t}{\ln(t)}\right),\ I=]1,+\infty[
\end{array}
$$

Exercice 2. (1) *Soit $f\ :\ ]0,1]\to\mathbb{R}_+$ continue par morceaux, décroissante et intégrable. Etudier* $\lim_{x\to 0} xf(x)$.

(2) *Soit $f\ :\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ continue par morceaux, décroissante et intégrable. Etudier* $\lim_{x\to+\infty} xf(x)$.

Exercice 3. (1) *Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$, peut-on dire quelque chose sur les limites de f en $\pm\infty$?*

(2) *Si $f\in L^1(\mathbb{R})$ est de plus uniformément continue sur $\mathbb{R}$, montrer que* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

(3) *On suppose que $f\in L^1(\mathbb{R})\cap\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et $f'\in L^2(\mathbb{R})$.*

(a) *Montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que $|f(x)-f(y)|\le C|x-y|^{1/2}$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$.*

(b) *En déduire que* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

(4) *On suppose ici $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f+f'\in L^2(\mathbb{R})$.*

(a) *Montrer que $f\in L^\infty(\mathbb{R})$.*

(b) *Montrer que* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Exercice 4. *On pose pour tout $n\ge 1,\ \beta>1,\ x,\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$,*

$$f_n(x)=\frac{n^\alpha}{(|x|+n)^\beta},\qquad g_n(x)=n^\gamma e^{-n|x|}.$$

(1) *Montrer que $f_n\in L^p(\mathbb{R})$ et ceci pour tout $1\le p\le+\infty,\ n\in\mathbb{N}^\star,\ \beta>1,\ \alpha\in\mathbb{R}$ et calculer $\|f_n\|_p$.*

(2) *Montrer que $g_n\in L^p(\mathbb{R})$ et ceci pour tout $1\le p\le+\infty,\ n\in\mathbb{N}^\star,\ \gamma\in\mathbb{R}$ et calculer $\|g_n\|_p$.*

(3) *Déduire des question précédentes que pour $1\le p<q\le+\infty$ les topologies induites sur $L^p(\mathbb{R})\cap L^q(\mathbb{R})$ ne sont pas comparables.*

Exercice 5. *Soit $f:\ [1,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue par morceaux. La convergence de $\int_1^\infty f(t)dt$ assure-t-elle celle de $\int_1^\infty f^3(t)dt$ et celle de $\int_1^\infty \frac{|f(t)|}{t^3}dt$? (considérer les applications : $f,g\ :\ [1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définies par : $f(t)=n$ pour tout $t\in[n,n+1/n^3]$ et $n\in\mathbb{N}^\star$ et $g(t)=t^2\sin(t^p)$ avec $p>3$.*

Exercice 6. *Soient $1\le\alpha\le\beta<+\infty$ et $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue par morceaux.*

(1) *Montrer que : $t^p\le\max\{t^\alpha,t^\beta\}$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et tout $p\in[\alpha,\beta]$.*

(2) *Montrer que $|f(x)|^p\le|f(x)|^\alpha+|f(x)|^\beta$ pour tout $\alpha\le p\le\beta$ et tout $x\in\mathbb{R}$.*

(3) *Si $f\in L^\alpha(\mathbb{R})\cap L^\beta(\mathbb{R})$, montrer que $f\in L^p(\mathbb{R})$, pour tout $\alpha\le p\le\beta$.*

(4) *Soit $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $I_f:=\{1\le p\le+\infty\ :\ f\in L^p(\mathbb{R})\}$ est toujours un intervalle.*

(5) *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux et telle que* $I_f \neq \emptyset$. *Par convergence dominée, montrer que* $p \mapsto \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$ *est continue sur* I_f.

Exercice 7. *Soit* Ω *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *tel qu'il existe* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux et telle que* f *et* $1/f$ *appartiennent à* $L^1(\Omega)$. *Montrer que* $\lambda(\Omega) < \infty$.

Exercice 8. *Soit* $E \subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert de longueur* $\lambda(E) < \infty$ *finie et soient* $1 \leq p < q \leq \infty$. *Montrer que* $L^q(E) \subset L^p(E)$ *et plus précisément*

$$\|f\|_p \leq \lambda(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_p, \quad \forall\, f \in L^q(E).$$

En déduire que l'injection canonique $L^q(E) \hookrightarrow L^p(E)$ *est aussi continue.*

Exercice 9. *Soient* $1 \leq p, q < +\infty$, $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ *et* $r > 0$ *tel que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. *Montrer la forme généralisée de l'inégalité de Hölder vue en cours :* $fg \in L^r(\Omega)$ *et* $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Exercice 10. ***(une inégalité de Hardy).*** *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R})$. *On pose pour* $x > 0$: $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

(1) *Montrer que* g *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *et se prolonge continument en* $x = 0$.

(2) *Soient* $0 < a < b$, *montrer que*

$$\int_a^b g^2(t)dt = ag^2(a) + 2\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt \int_a^b f^2(t)dt}.$$

(3) *Montrer que* $\int_0^b g^2(t)dt \leq 4\int_0^b f^2(t)dt$.

(4) *En déduire que* $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *et que* $\int_{\mathbb{R}_+} g^2(t)dt \leq 4\int_{\mathbb{R}_+} f^2(t)dt$.

(5) *A l'aide des fonctions* $f_n(t) = 1$ *pour* $0 \leq t \leq 1$, $= 1/\sqrt{t}$ *pour* $1 \leq t \leq n$ *et* $= \sqrt{n}/x$ *pour* $x \geq n$, *montrer que la constante 4 est optimale.*