☢ M1 MEI Analyse – Feuille d'Exercices Semaine 7/8. ☯

Exercice 1. *Soient* $p, q \in \mathbb{R}_+^\star$, *montrer que* $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{nq+p}$. *Observez quelques cas particuliers :* $(p,q) = (1,1), (1,2), (2,2)$...

Exercice 2. *A l'aide de la fonction* $\varphi(x) := \int_0^1 \frac{t-1}{\log(t)} t^x dt$, *montrer que* $\int_0^1 \frac{t-1}{\log(t)}dt = \log(2)$.

Exercice 3. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$: $a_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

(1) *Déterminer la limite* l *de la suite* $(a_n)_n$.
(2) *Déterminer un équivalent de* $a_n - l$.
(3) *Montrer que* $u_n = l + \frac{a}{n} + \frac{J}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *où l'on exprimera* J *sous forme d'une intégrale.*
(4) *Montrer que* $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$. *En déduire* J *et le développement asymptotique à trois termes de* a_n.

Exercice 4. *Domaine de définition, puis calcul de* $F(x) = \int_0^\infty \frac{arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt$.

Exercice 5. *Etudier sur son domaine de définition la fonction définie par* $f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\cos(xt)}{t^2+1}dt$. *Trouver une équation différentielle vérifiée par* f. *En déduire la forme explicite de* f.

Exercice 6. *Montrer que* $\int_0^\infty \frac{x}{ch(x)}dx = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 7. *Convergence et calcul de* $\int_0^\infty \frac{\log(t)}{1-t^2}dt$.

Exercice 8. *Soit* $P(x) = 6 + 4x + 3x^2 + 8x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 6x^6 \in \mathbb{R}[x]$, *on pose pour* $x \in [0,5[$: $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{P(t)}dt$. *En quels point de* $[0,5[$, g *atteint-elle sa borne inférieure ? Que dire de sa borne supérieure ?*

Exercice 9. *Soit pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, $x \in [0,1]$: $g_n(x) = \sin(nx)$ *Montrer que la suite* $(g_n)_n$ *n'admet aucune sous-suite simplement convergente vers* 0 *sur* $[0,1]$.

Exercice 10. *Calculer la somme de la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

(1) *En remarquant que* $\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}dt$.
(2) *A l'aide de la fonction* $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

Exercice 11. *Etudier sur son domaine de définition la fonction définie par* $f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx}\log(t)dt$. *Trouver une équation différentielle vérifiée par* f. *En déduire la forme explicite de* f.

Exercice 12. *Calcul de* ***l'intégrale de Dirichlet*** $\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt$. *On considère les applications* $f(x) := \int_0^\infty \frac{sin(t)}{t+x}dt$, $g(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t^2+1}dt$.

(1) *Montrer que* f *et* g *sont de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^\star$.
(2) *Montrer que* f *et* g *sont solutions de l'équation différentielle* $y'' + y = \frac{1}{x}$.
(3) *Montrer que* $f - g$ *est* 2π*-périodique.*
(4) *Montrer que* f *et* g *sont équivalentes à* $\frac{1}{x}$ *en* $+\infty$ *puis que* $f = g$.
(5) *En déduire que* $\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 13. *Convergence et montrer que de* $\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1}dx = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^3}$.

Exercice 14. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \int_1^\infty e^{-t^n}dt$. *Après avoir justifié la définition de* a_n, *montrer que la suite* a_n *converge, préciser sa limite et donner un équivalent de* a_n.

19 octobre 2012 Lassère Patrice : Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr