Première partie : Dans cette partie on va étudier en détail la **constante d'Euler-Mascheroni** :

$$\gamma := \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n)\right)=\lim_{n\to+\infty}(H_n-\log(n))$$

où $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},\ n\geq 1$ est le n-ième nombre harmonique.

(1) (existence de gamma, preuve classique). on pose pour $n\geq 1$: $a_n = H_n - \log(n)$.

(a) Montrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.

(b) Montrer que $H_n - 1 < \log(n) < H_n - 1/n,\ n\geq 1$.

(c) Montrer que $0 < a_n < 1$.

(d) En déduire que γ existe et $0\leq\gamma\leq 1$.

(2) (existence de gamma, preuve plus sportive).

(a) Montrer que $\int_{1/n+1}^{1/n}\log(t)dt = \frac{1}{n(n+1)}\left(\log\left(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)-1\right)$

(b) Montrer que pour tout $n\geq 1$, il existe $\frac{1}{n+1} < c_n < \frac{1}{n}$ tel que $\int_{1/n+1}^{1/n}\log(t)dt = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\log(c_n)$.

(c) On pose $b_n := 1/nc_n$. Montrer que $\lim_n b_n = 1$.

(d) Montrer que $e = b_n(1+1/n)^n$.

(e) Montrer que $1 = \log(b_n) + n[\log(n+1)-\log(n)]$.

(f) En déduire que $H_n = \log\left(b_1 b_2^{1/2} b_3^{1/3}\ldots b_n^{1/n}\right) + \log(n+1) := d_n + \log(n+1)$.

(g) Montrer que la suite $(d_n)_n$ est croissante et $d_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

(h) En déduire que γ existe et $0 < \gamma \leq \pi^2/6$.

(3) (existence de gamma, preuve trapézoïdale).

(a) En appliquant la méthode des trapèzes, montrer que pour tout $k\geq 2$, il existe $k-1 < \xi_k < k$ tel que $\int_{k-1}^k \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}\right)-\frac{1}{6\xi_k^3}$.

(b) En déduire que γ existe et $\gamma = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sum_{k\geq 2}\frac{1}{\xi_k^3}$.

(c) En comparant avec une intégrale, montrer que pour tout $n\geq 2$: $\frac{1}{12(n+1)^2} < \frac{1}{6}\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{\xi_k^3} < \frac{1}{12(n+1)^2}$.

(d) En déduire un encadrement de γ en fonction de la **constante d'Apery** $\zeta(3) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$.

(4) (quelques formes intégrales de γ).

(a) Montrer que $H_n = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}dt,\ (n\geq 1)$. En déduire que

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt - \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

(b) Avec la question précédente, montrer que $\int_0^\infty e^{-t}\log(t)dt = \gamma$.

(c) Montrer que $\int_0^1 \log(-\log(t))dt = -\gamma$.

(d) (i) En intégrant pour $r \in [1,n]$ l'égalité $\int_0^\infty e^{-rt}dt = 1/r$ montrer que $\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t}dt = \log(n)$.

(ii) En déduire (en justifiant la convergence des deux intégrales) que $H_n - \log(n) = \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt + \int_0^\infty e^{-nt}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t-1}\right)dt$.

(iii) En déduire par convergence dominée que

$$\gamma = \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log(t)}\right)dt.$$

(e) Montrer que $\gamma = H_n - \log(n) - \int_n^\infty \frac{\{t\}}{t^2}dt$ ($\{x\} = x - [x]$ est la partie fractionnaire de x).

(f) Soit $f(x) = e^{-\alpha e^x} + e^{-\alpha e^{-x}} - 1$, $(\alpha > 0)$. Montrer le formule de **Ramanujan** : $\int_0^\infty f(t)dt = -\gamma - \log\alpha$.

(g) Montrer que $\gamma = \frac{ab}{a+b}\int_0^\infty \frac{e^{-t^a}-e^{-t^b}}{t}dt,\ (a,b>0,\ a\neq b)$.

(h) Montrer la formule de **Catalan** : $\gamma = 1 - \int_0^1 \left(\sum_{k\geq 1} t^{2^k}\right)\frac{dt}{1+t}$.

(5) Dans cette dernière partie on étudie la vitesse de convergence de la suite $(a_n)_n$ vers γ. Plus précisément, on va montrer que $a_n - \gamma \sim 1/2n$.

(a) Montrer que pour tout $x > 0$: $\frac{1}{2} - \frac{x}{8} < \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} < \frac{1}{2}$.

(b) Montrer que $a_n - \gamma = \int_0^\infty e^{-nt}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t-1}\right)dt$.

(c) En déduire que $\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} < a_n - \gamma < \frac{1}{2n}$ et conclure.

Seconde partie : On étudie ici la fonction gamma. Soit

$$f\ :\ \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \ni (x,t) \longmapsto f(x,t) := t^{x-1}e^{-t}.$$

(1) Montrer que pour tout $x > 0$ la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On définit alors la **fonction Gamma** par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

(2) Montrer que $\Gamma \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star)$ et, pour tous $x > 0,\ k \in \mathbb{N}$: $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \log^k(t)t^{x-1}e^{-t}dt$.

(3) Etablir successivement

(a) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),\ \forall x > 0$.

(b) $\Gamma(n+1) = n!,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

(d) $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x},\ \forall x > 0$.

(4) On pose $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(t),\ n \geq 1$. Montrer successivement

(a) $\Gamma'(1) = \lim_n \int_0^n \log(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$.

(b) $\int_0^n \log(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{n+1}(\log(n) - H_{n+1})$.

(c) $\Gamma'(1) = -\gamma$ (γ est la **constante d'Euler**) étudiée dans la première partie.

(d) $\Gamma'(n+1) = n!\left(H_n - \gamma\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star$.

(5) (a) Au moyen du changement de variables $s = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$, montrer que

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)} ds \text{ où } \varphi(x,s) := x \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x},\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

(b) Montrer que $\forall x > 0,\ s \in]-\sqrt{x}, 0]\ :\ \varphi(x,s) \leq -\frac{s^2}{2}$

(c) Montrer que $\forall s \geq 0,\ x \geq 1\ :\ \varphi(x,s) \leq \varphi(1,s)$.

(d) En déduire $\lim_{x\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{\varphi(x,s)} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$

(e) Et enfin la **formule de Stirling** : $\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$.

(6) (a) Montrer que pour tout $x > 0$: $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \ = \ \Gamma(x)$,

(b) En déduire la **formule de Gauss** : $\Gamma(x) \ = \ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)},\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star$.

(c) Puis celle de **Weierstrass** : $\Gamma(x)^{-1} \ = \ x e^{\gamma x} \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}},\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star$.

(7) On note $\psi\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, l'application définie pour $x > 0$ par $\psi(x) \ = \ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Démontrer que pour tout $x > 0\ :\ \psi(x) \ = \ -\frac{1}{x} - \gamma + x \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(x+n)}$, et en déduire que $\Gamma'(1) \ = \ -\gamma \ = \ \int_0^{+\infty} e^{-x} \log(x) dx$.

(8) Montrer que pour tout $x > 0$: $\Gamma(x+1)\zeta(x+1) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{t^x}{e^t - 1} dt$ (où $\zeta(x) := \sum_{n\geq 1} n^{-x}$).

(9) (a) Montrer que $\log \Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(b) Réciproquement, soit $f\ :\ \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ une application log-convexe (i.e. $\log(f)$ est convexe) vérifiant $f(1) = 1$ et $\forall\, x > 0,\ f(x+1) = xf(x)$.; montrer (à l'aide de la formule de Gauss) que $f = \Gamma$ (**théorème de Bohr-Mollerup**).

(c) Le théorème de Bohr-Mollerup est un moyen très efficace pour vérifier des formules sur la fonction gamma. Appliquez le pour démontrer la **formule multiplicative de Gauss** :

$$\Gamma(mx) = \frac{m^{mx-1/2}}{(2\pi)^{(m-1)/2}} \Gamma(x)\Gamma(x+1/m)\Gamma(x+2/m)\dots\Gamma(x+(m-1)/m), \quad x > 0,\ m = 2, 3, \dots$$

(10) La **fonction beta** $B(x,y)$ est définie par

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, y > 0.$$

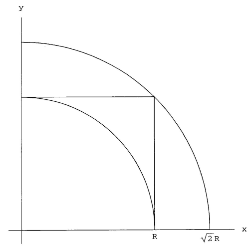
(a) Montrer que la fonction beta est bien définie sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ et symétrique.

(b) On va démontrer l'importante formule reliant les fonctions beta et gamma :

☯ $$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}_+^\star.$$

(i) Montrer que $B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta) d\theta$.

(ii) En comparant les intégrales de $g(u,v) \ = \ u^{2x-1} v^{2y-1} e^{-(u^2+v^2)}$ sur les trois domaines représentés dans la figure ci-contre, puis en faisant tendre R vers $+\infty$ en déduire ☯.



(c) (i) Montrer que $B(x,x) = 2^{1-2x}B(x,1/2)$, $(x>0)$ (on peut faire le changement de variable $u = 4t(1-t)$...).

(ii) En déduire avec la formule ☯, la **formule de duplication de Legendre** :

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+1/2), \quad (x>0).$$

(11) La **formule de réflexion d'Euler** est une formule très importante reliant les fonctions gamma et sinus :

☢
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad 0<x<1.$$

La démonstration qu'on propose ici repose sur la formule

$$\frac{\pi}{\sin(\pi c)} = 2c\left(\frac{1}{2c^2} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{c^2-n^2}\right), \quad c\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

qui se démontre (classiquement) avec les séries de Fourier. Soit $0<c<1$.

(a) Avec le changement $x = \frac{t}{t-1}$, montrer que $\Gamma(c)\Gamma(1-c) = \int_0^\infty \frac{x^{c-1}}{1+x}dx$.

(b) Avec le changement $u = 1/x$ montrer que $\int_1^\infty \frac{x^{c-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{u^{-c}}{1+u}du$.

(c) Via l'égalité $\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x}{x+1}$ et les questions précédentes, montrer que

$$\Gamma(c)\Gamma(1-c) = \int_0^1 x^{c-1}dx - \int_0^1 \frac{x^{-c}-x^c}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi c)}.$$

(12) **Applications à des calculs d'intégrales** :

(a) Montrer que $\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$, $(n\in\mathbb{N}^\star)$.

(b) Montrer que pour tous $x,y>0$: $x^{-y}\Gamma(y) = \int_0^1 t^{x-1}\log^{y-1}(1/t)dt$. En déduire que

$$\int_0^1 \sqrt{\log(1/t)}dt = \sqrt{\pi}/2, \quad \int_0^1 \sqrt{t\log(1/t)}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}}.$$

(c) Montrer que $\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}dt = \pi/8$.

(d) Montrer que $\Gamma(1/6) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{\pi}}\Gamma(1/3)^2$.

(e) Montrer que $\int_0^1 \sqrt{1-t^3}dt = \frac{\sqrt{3}}{10\pi\sqrt[3]{2}}\Gamma(1/3)^3$.

(f) A l'aide du changement $t = \frac{u}{1+u}$, montrer que $B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$. En déduire que $\int_0^\infty \frac{t^3}{(1+t)^7}dt = 1/60$.

(13) On se propose dans cette question de donner deux nouvelles démonstrations de la formule

☯ $$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x,y \in \mathbb{R}_+^\star.$$

démontrée en (10-b) reliant les fonction beta et Gamma.

(a) Preuve de ☯ par la convolution : on pose pour $\alpha > 0$: $f_\alpha(t) := f(\alpha, t) = t^{x-1}e^{-t}$.

(i) Montrer $f_\alpha \star f_\beta \in L^1(\mathbb{R}_+)$ pour tous $\alpha > 0,\ \beta > 0$.

(ii) En calculant de deux manières différentes l'intégrale de $f_\alpha \star f_\beta$ montrer que

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt = B(\alpha,\beta).$$

(b) Une démonstration de ☯ via le théorème de Bohr-Mollerup.

(i) Montrer que $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y),\ (x,y>0)$. On fixe alors $y > 0$ et on pose $g(x) = B(x,y)\Gamma(x+y)$.

(ii) Montrer que g est log-convexe et vérifie $g(x+1) = xg(x)$ pour tout $x > 0$.

(iii) Montrer que $g(x) = \Gamma(x)\Gamma(y)$ et conclure.

(iv) Bonus : par un choix convenable de x et y, déduire de ☯ la valeur de l'intégrale de Gauss : $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(14) Pour $r > 0$ et $n \geq 1$, on désigne par $v_n(r)$ le volume de la boule euclidienne $B_n(r) := \{\,(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n\ :\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2\}$. Montrer que $v_n(r) = r^n v_n(1)$ et

$$v_{n+1}(1) = \int_{-1}^1 v_n(\sqrt{1-t^2})dt = v_n(1)\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n/2}dt = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}.$$

Références

[1] Artin E. « *The Gamma function* » Holt, Rinehart and Winston (1964).

[2] Boros G. & Moll V.H. « *Irresistible Integrals* », Cambridge University Press, (2006).

[3] Duren P. « *Invitation to classical Analysis* », Pure and Applied Undergraduade Texts 17, AMS, (2012).

[4] Havil J. « *Gamma : exploring Euler's constant* », Princeton Science Library, (2003).

[5] Les revues de la MAA : « *The American Mathematical Monthly* » et « *Mathematics Magazine* » .

19 décembre 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr