Voici quelques exercices supplémentaires pour bien profiter des vacances....

Exercice 1. *Soit* $A \in M_4(\{\pm 1\}))$ *quelles sont les valeurs possible pour* $\det(A)$ *?*

Exercice 2. *Soient* $1 \leq \alpha \leq \beta < +\infty$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux.*

(1) *On suppose que* $f \in L^\alpha(\mathbb{R}) \cap L^\beta(\mathbb{R})$*. Montrer que* $|f|^p \leq |f|^\alpha + |f|^\beta$*.*

(2) *Montrer que* $I_f := \{1 \leq p \leq +\infty \ : \ f \in L^p(\mathbb{R})\}$ *est toujours un intervalle.*

(3) *Montrer que* $p \mapsto \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$ *est continue sur* I_f*.*

Exercice 3. *Soient* $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ *telles que les matrices* $A, A+B, A+2B, A+3B$ *et* $A+4B$ *soient inversibles à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *; en est-il de même pour* $A + 2011B$ *?*

Exercice 4. *Soit* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *continue par morceaux. La convergence de* $\int_1^\infty f(t)dt$ *assure-t-elle celle de* $\int_1^\infty f^3(t)dt$ *et celle de* $\int_1^\infty \frac{|f(t)|}{t^3}dt$ *?*

Exercice 5. *Quelle est la nature de l'intégrale impropre* $\int_0^\infty \sin(t\log(t))dt$ *?*

28 octobre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr