Suites et séries – Vendredi 2 Juin 2012.

Exercice 1. ❤ *Soit* $(r_n = p_n/q_n)_n$ *une suite de rationnels qui converge vers* $x \notin \mathbb{Q}$. *Montrer que* $\lim_n q_n = +\infty$.

Exercice 2. *Montrer que la relation* $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ *permet de définir une suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *qui vérifie* $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o(1/n^6)$.

Exercice 3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$ *montrer que le polynôme* $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ *admet une unique racine positive* $a_n \in \mathbb{R}_+$. *Montrer que* $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + o(1/2^{n+2})$.

Exercice 4. *Montrer qu'une suite* $(x_n)_n$ *de nombres réels vérifiant* $\lim_n x_n^2 = 1$ *et* $|x_{n+1} - x_n| < 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *converge.*

Exercice 5. *Soit* $e := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdots + \frac{1}{n!} + r_n$. *Montrer que* $\frac{1}{n+1} < n!r_n < \frac{1}{n}$. *En déduire que* $\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!) = 2\pi$ *puis que* $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6. *Pour* $n \geq 1$ *on définit l'entier* a_n *comme le plus petit entier tel que* $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 1$. *Montrer que la suite* $(a_n)_n$ *est bien définie et* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = e$.

Exercice 7. ❤ *Existe-t-il une fonction* $f \in \mathscr{C}^2([-1,1],\mathbb{R})$ *telle que* $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ *converge mais* $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ *diverge ?*

Exercice 8. ❤ *Nature (convergence, convergence absolue) de la série* $\sum_{n\geq 2} u_n$ *de terme général* $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 9. *Soit* $(a_n)_n \subset \mathbb{C}^\star$ *vérifiant* $|a_r - a_s| > 1$ *pour tout* $r \neq s$. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n^3}$ *diverge.*

Exercice 10. ❤ $(p_n)_n$ *désignant la suite croissante des nonbres premiers* $\mathscr{P}$, *on veut montrer la divergence de la série* $\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p}$. *Montrer que pour tout* $n \geq 2$: $\prod_n \frac{p_n}{p-1} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. *En déduire que* $2\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} > \sum_{p\leq n}[\log(p) - \log(p-1)] \geq \log(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})$ *et conclure.*

Exercice 11. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\log n)}{n}$ *diverge. (Indic : estimer la somme sur des blocs ou les cosinus est* $\geq \sqrt{2}/2$*...).*

Exercice 12. *Pour* $f \in \mathscr{C}([0,1])$ *on pose* $a_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$. *Montrer que la convergence de la série* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *implique* $f(1) = 0$. *Pour la réciproque considérer* $f(x) = -x/\log(x),\ x \in]0,1[$.

Exercice 13. ❤ *Utiliser le théorème des accroissements finis pour établir la divergence de la série de terme général* $1/k\log(k)\log(\log(k))$.
Estimer $\sum_{10^6\leq k\leq 10^7} 1/k\log(k)\log(\log(k)),\ \sum_{10^6\leq k\leq 10^7} 1/k\log(k), \sum_{10^6\leq k\leq 10^7} 1/k$, *observation ?*

Exercice 14. ❤ *Montrer que dans* $\{x \in \mathbb{R}\ :\ \sin^2(x) \leq \frac{1}{2}\}$ *on ne trouvera jamais trois entiers consécutifs. En déduire la nature de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n)}{n}$.

24 mai 2012 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

Soit $(a_n)_n \subset \mathbb{C}^\star$ vérifiant $|a_r - a_s| > 1$ pour tout $r \neq s$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n^3}$ (✔) diverge.

Considérons une suite $(a_n)_n$ de nombres complexes vérifiant la propriété (✔). Posons pour tout entier k

$$S_k = \{n \in \mathbb{N} \ : \quad k < |a_n| \leq k+1\}.$$

Les disques fermés de centre a_n et de rayon $1/2$ sont par hypothèse deux à deux disjoints et pour tout $n \in S_k$

$$\overline{D}(a_n, 1/2) \subset \{z \in \mathbb{C} \ : \ k - \frac{1}{2} \leq |z| \leq k + \frac{3}{2}\} = C(0, k-1/2, k+3/2).$$

(si $k = 0$, interpréter le second terme comme le disque $D(0, 3/2)$) soit, en sommant les aires

$$\mathrm{card}(S_k)\frac{\pi}{4} \leq \pi\left[\left(k+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right] = 2\pi(2k+1)$$

si $k \in \mathbb{N}^\star$ et

$$\mathrm{card}(S_0)\frac{\pi}{4} \leq \pi\frac{9}{4}$$

si $k = 0$. Ainsi

$$\mathrm{card}(S_0) \leq 9 \quad \text{et} \quad \mathrm{card}(S_k) \leq 8(2k+1), \ \forall\, k \in \mathbb{N}^\star.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$

$$\sum_{n\in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \leq \frac{\mathrm{card}(S_k)}{k^3} \leq \frac{8(2k+1)}{k^3} \leq \frac{24}{k^2}$$

car $\overline{D}(a_n, 1/2) \subset C(0, k-1/2, k+3/2)$ implique $|a_n| \leq k$ et $k \geq 1 \implies 2k+1 \leq 3k$. De même S_0 étant fini, la somme $\sum_{n\in S_0} \frac{1}{|a_n|^3}$ est finie et finalement

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|a_n|^3} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n\in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \leq \sum_{n\in S_0} \frac{1}{|a_n|^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{24}{k^2} < \infty$$

où la sommation par paquets dans le second terme est légitime puisque la série est à termes positifs et $(S_k)_{k\geq 0}$ une partition de $\mathbb{N}$. ■

$\mathscr{P}$ désignant l'ensemble des nombres premiers, montrer la divergence de la série $\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p}$.

Notons $p_1, p_2, \dots$ la suite croissante des nombres premiers. Si la série $\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p}$ converge, il existe un entier k tel que

$$\sum_{i\geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$$

et par suite

$$(\text{✘}) \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i\geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}.$$

Nous dirons que $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont les *petits nombres premiers*, les autres $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots$ seront les *grands nombres premiers*. Pour $N \in \mathbb{N}$, N_b sera le nombre d'entiers $n \leq N$ admettant au moins un grand nombre premier comme diviseur et N_s lui désignera le nombre d'entiers $n \leq N$ admettant uniquement des petits nombres premiers comme diviseur. Nous allons montrer que l'hypothèse de convergence de la série assure, pour un entier N convenablement choisi, l'inégalité $N_b + N_s < N$ d'où la contradiction désirée puisque bien entendu $N = N_b + N_s$.

Pour estimer N_b, remarquons que $E\left(\frac{N}{p_1}\right)$ est le nombre d'entiers $n \leq N$ multiples de p_1, la formule (✘) donne

$$(\text{✔}) \qquad N_b \leq \sum_{i\geq k+1} E\left(\frac{N}{p_i}\right) < \frac{N}{2}.$$

Considérons maintenant un entier $n \leq N$ n'admettant que des petits diviseurs premiers, et écrivons le sous la forme $n = a_n b_n^2$ où a_n est la partie « non carrée ». Chaque a_n se décompose donc en un produit de différents petits nombres premiers : il y a donc 2^k choix possibles pour a_n. Comme $b_n \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$, il reste au plus $\sqrt{N}$ choix possibles pour b_n soit

$$(\bigstar) \qquad N_s \leq 2^k\sqrt{N}.$$

On choisit enfin N suffisamment grand pour que $2^k\sqrt{N} \leq N/2$ (i.e. $2^{k+1} \leq \sqrt{N}$), par exemple $N = 2^{2k+2}$; la formule (✔) étant vraie pour tout N elle donne avec ($\bigstar$) : $N_b + N_s < N$ d'où la contradiction. ❏

ℹ **Remarque :** La divergence de la série $\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p}$ est établie pour la première fois par L.Euler en 1748. La preuve ci-dessus est celle de P.Erdös (1938). Un corollaire immédiat est que l'ensemble des nombres premiers est infini. ■