☯ ☢ ☯ AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES ☯ ☢ ☯
Intégration 1 – Samedi 10 Juin 2012.

Exercice 1. ❤ *Montrer que deux entiers $k, p \in \mathbb{N}$ vérifient*

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k = (1 + 2 + \cdots + n)^p, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

si et seulement si $k = p = 1$ ou $k = 3$ et $p = 2$.

Exercice 2. *On désigne par G_n la moyenne géométrique des coefficients binomiaux $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ i.e.*

$$G_n = \sqrt[n+1]{\binom{n}{0}\binom{n}{1}\dots\binom{n}{n}}.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{G_n} = \sqrt{e}$ (Indic : on peut commencer par montrer que $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\dots\binom{n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n+1}\right)^{n+1-2k}$ en remarquant que $\sum_{k=1}^{n}(n+1-2k) = 0$ pour reconnaitre dans $n^{-1}\log(G_n)$ une somme de Riemann...).

Exercice 3. *Déterminer les limites*

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1} + \frac{2^{2/n}}{n+1/2} + \cdots + \frac{2^{n/n}}{n+1/n}\right) = ?$

(2) ❤ $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^2}\right).$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)g\Big(\frac{k+1}{n}\Big)$ *où $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$.*

(4) ❤ $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k$ *où $A_1, \dots, A_n$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité.*

Exercice 4. ❤ *On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}$. Etudier la suite $(u_n)_n$ et les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n u_n/n$.*

Exercice 5. *Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ vérifiant*

$$\exists\, A \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N} \ :\quad f(x)f(2x)\dots f(nx) \le An^N,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. ❤

(1) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, peut-on dire quelque chose sur les limites de f en $\pm\infty$?*

(2) *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est de plus uniformément continue sur $\mathbb{R}$, montrer que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.*

(3) *On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^2(\mathbb{R})$.*

  (a) *Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^{1/2}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.*

  (b) *En déduire que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.*

(4) *On suppose ici $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f + f' \in L^2(\mathbb{R})$.*

  (a) *Montrer que $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

  (b) *Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.*

Exercice 7. ❤ *Soit* $f:\ [1,+\infty[\to\mathbb{R}$ *continue par morceaux. La convergence de* $\int_1^\infty f(t)dt$ *assure-t-elle celle de* $\int_1^\infty f^3(t)dt$ *et celle de* $\int_1^\infty \frac{|f(t)|}{t^3}dt$ *? (considérer les applications :* $f,g\ :\ [1,+\infty[\to\mathbb{R}$ *définies par :* $f(t)=n$ *pour tout* $t\in[n,n+1/n^3]$ *et* $n\in\mathbb{N}^\star$ *et* $g(t)=t^2\sin(t^p)$ *avec* $p>3$*.*

Exercice 8.

Exercice 9. *En comparant avec des intégrales, montrer que la partie entière de* $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$ *vaut 2997.*

Exercice 10. *.* $C(\alpha)$ *désignant le coefficient* x^{2011} *dans le DL à l'origine et à un ordre convenable de* $(1+x)^\alpha$ *calculer* $\displaystyle\int_0^1 C(-t-1)\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}\cdots+\frac{1}{t+2012}\right)dt$*.*

Exercice 11. *Soit* $f\in L^1(\mathbb{R})$*, montrer que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|f(t)|dt\leq\sqrt{8}\left(\int_{\mathbb{R}}|tf(t)|^2dt\right)^{\frac14}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(t)|^2dt\right)^{\frac14}$ *(on pourra pour tout* $x>0$ *écrire* $\int_{\mathbb{R}}|f(t)|dt=\int_{[-x,x]}|f(t)|dt+\int_{\mathbb{R}\setminus[-x,x]}\dfrac{1}{|t|}|tf(t)|dt\ldots$*).*

Exercice 12. *Préciser la nature (convergence, convergence absolue, divergence...) des intégrales impropres :*

1) $\displaystyle I_\alpha=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt,\quad J_\alpha=\int_2^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha+\sin(t)}dt,\ 0<\alpha<2.$

2) $\displaystyle\int_b^\infty\left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right)dx,\ (a,b)\in\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}_+^\star.$

3) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\left(\cos(x^{-1})\right)^x-1}{x^\alpha}dx,\ \alpha\in\mathbb{R},\quad \int_0^\infty\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+2}\right)dx,\quad \int_2^\infty\frac{x^{\log(x)}}{\log^x(x)}dx,\quad \int_0^\infty\cos(x^2)dx.$

Exercice 13. *.* $C(\alpha)$ *désignant le coefficient* x^{2011} *dans le DL à l'origine et à un ordre convenable de* $(1+x)^\alpha$ *calculer* $\displaystyle\int_0^1 C(-t-1)\Big(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}\cdots+\frac{1}{t+2012}\Big)dt$*.*

23 mai 2012 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr