PROBLÈME

Dans ce problème $\mathscr{E}$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et $\mathbb{R}[x]$ le sous espace de $\mathscr{E}$ composé des fonctions polynômes.
$\mathscr{S}$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Si $a \in \mathscr{S}$ on écrira $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et si $(a^p)_p \subset \mathscr{S}$ on écrira $a^p = (a_i^p)_i$. Enfin $\mathscr{L}$ désigne le sous-espace contitué des suites $(a_i)_i$ telles que $\sum_0^\infty \mid a_i \mid$ converge.
On rappelle que
$N(f) := \sum_0^\infty \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}$ est une norme sur $\mathbb{R}[x]$ qui dans toute la suite sera muni de la topologie induite par cette norme.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$ montrer que l'application $\Lambda_n \ : f \in \mathbb{R}[x] \ \mapsto f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{R}[x]$ de norme $n!$.

(2) Montrer que $\mathbb{R}[x]$ n'est pas complet *(pour cela on pourra par exemple montrer que la suite de terme général $g_n(x) = \sum_0^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}[x]$ mais ne peut converger dans $\mathbb{R}[x]$ vu la question précédente).*

(3) Pour $a \in \mathscr{L}$ on pose $N_{\mathscr{L}}(a) := \sum_0^\infty \mid a_i \mid$, vérifier que $(\mathscr{L}, N_{\mathscr{L}})$ est un espace vectoriel normé.

(4) Si $a \in \mathscr{L}$, ρ_a désigne le rayon de convergence de la série entière $\sum_0^\infty a_i z^i$. Montrer que $\inf\{\rho_a,\, a \in \mathscr{L}\} = 1$.

(5) Vérifier que l'on définit bien une application lineaire $\varphi \,:\, \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{E}$ en posant pour $a \in \mathscr{L} \,:\, \varphi(a) := \sum_0^\infty a_i z^i$.

Dans toute la suite on désignera par $\mathscr{F}$ le sous espace vectoriel $\varphi(\mathscr{L})$ de $\mathscr{E}$, et on considérera φ comme une application de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{F}$.

(6) Montrer que φ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{F}$ et pour $f \in \mathscr{F}$ expliciter $\varphi^{-1}(f)$. Enfin, vérifier que $\mathbb{R}[x] \subset \mathscr{F}$ et caractériser le sous espace $\mathscr{H} := \varphi^{-1}(\mathbb{R}[x]$ dans $\mathscr{L}$.

(7) Soit $(a^p)_p \subset \mathscr{L}$ convergeant vers $a \in \mathscr{L}$, montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, : $\lim_p a_i^p = a_i$. $(\star_i)$

(8) Trouver $(a^p)_p \subset \mathscr{L}$ et $a \in \mathscr{L}$ tels que $(\star_i)$ soit vérifié pour tout $i \in \mathbb{N}$ sans qu'il y ait convergence de $(a^p)_p$ vers a dans $\mathscr{L}$.

(9) Montrer que $(\mathscr{L}, N_{\mathscr{L}})$ est un espace de Banach.

(10) Pour $f \in \mathscr{F}$ on pose $N_{\mathscr{F}}(f) := N_{\mathscr{L}}(\varphi^{-1}(f))$. Montrer que $(\mathscr{F}, N_{\mathscr{F}})$ est un espace de Banach, que la restriction à $\mathbb{R}[x]$ de $N_{\mathscr{F}}$ coincide avec N et enfin que $\mathbb{R}[x]$ est un sous espace dense dans F.

(11) Soit une suite $(f_p)_p$ dans $\mathscr{F}$ qui converge dans $\mathscr{F}$ vers f, Montrer que :

$(\star)$ $(f_p)_p$ est uniformément convergente sur $]-1,1\,[$.

$(\star)$ $\forall K \subset]-1,1\,[\,, \forall k \in \mathbb{N} \,:\, (f_p^{(k)})_p$ est UCV vers $f^{(k)}$ sur K.

(12) Trouver une suite $(f_p)_p$ dans $\mathscr{F}$ telle que $\lim_p f_p = f$ dans $\mathscr{F}$ mais telle que pour tout $k \in \mathbb{N} \,:\, (f_p^{(k)})_p$ n'est pas UCV vers $f^{(k)}$ sur $]-1,1\,[$.