☯ ☢ ☯ AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES ☯ ☢ ☯

Dérivation & Applications – Vendredi 2 Juin 2012.

Vous trouverez ici bien entendu bien trop d'exercices pour la seance de vendredi, concentrez vous sur ceux signalés par le symbole ❤ et profitez du mois de juin et des vacances d'été pour les autres. Si un exercice vous résiste, contactez moi (lassere@math.univ-toulouse.fr) et je vous donnerai des indications afin de vous débloquer.

1. Généralités

Exercice 1. *Calculer la dérivée n-ième de* $f(x) = x^n(1-x)^n$ *pour en déduire que* $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ *puis retrouver ce résultat par la combinatoire.*

Exercice 2. *La fonction* $f(x) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}\sin(2^k x)$ *est-elle dérivable en* 0 *?*

Exercice 3. *Déterminer les fonctions* f *dérivables sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $f^2 + (1-f')^2 \leq 1$.

Exercice 4. *Soient*

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & si\ \ x\neq 0,\\ 0, & si\ \ x=0\end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x+2x^2\sin(1/x), & si\ \ x\neq 0,\\ 0, & si\ \ x=0\end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x^2), & si\ \ x\neq 0,\\ 0, & si\ \ x=0\end{cases} \qquad k(x) = \begin{cases} x^4e^{-x^2/4}\sin(8/x^3), & si\ \ x\neq 0,\\ 0, & si\ \ x=0\end{cases}$$

$$l(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & si\ \ x\neq 0,\\ 0, & si\ \ x=0.\end{cases} \qquad m(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & si\ \ x\notin\mathbb{Q},\\ 0, & si\ \ x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Montrer que ces fonctions sont toutes (sauf m*) dérivables sur* $\mathbb{R}$*, mais*

(1) f' *n'est pas continue à l'origine.*

(2) $g'(0) > 0$ *mais* g *n'est strictement croissante sur aucun voisinage de* 0.

(3) h' *n'est pas bornée sur* $[-1,1]$.

(4) ❤ k' *est bornée sur* $[-1,1]$ *mais n'y atteint pas ses bornes.*

(5) l *est* C^∞ *en* 0 *(donc sur* $\mathbb{R}$*) mais n'est pas développable en série entière à l'origine bien que sa série de Taylor à l'origine converge sur* $\mathbb{R}$.

(6) m *est continue et dérivable uniquement en* $x=0$*, nulle part deux fois dérivable mais toutefois* m *admet en* $x=0$ *un développement limité à tout ordre.*

Exercice 5. ❤

(1) *Soit* $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ *une application dérivable, montrer que* $f'(a)$ *est valeur d'adhérence de* $f'(]a,b[)$.

(2) *Soit* $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *une application dérivable sur* $]a,b[$ *sauf peut être en un point* $c\in]a,b[$*. Si* $f'(x)$ *admet une limite* l *lorsque* x *tend vers* c*, montrer que* f *est dérivable en* c *et* $f'(c)=l$.

Exercice 6. ❤ *Démontrer le théorème de Darboux : Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*,* $f : I\to\mathbb{R}$ *une application dérivable sur* I*, alors* f' *vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur* I.

Exercice 7. *On considère l'application* $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *définie par :* $f(x) = \begin{cases} 1/q, & si\ \ x=\frac{p}{q},\ p\wedge q=1,\\ 1, & si\ \ x=0,\\ 0, & si\ \ x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$

(1) *Montrer que* f *est* 1*-périodique.*
(2) *Montrer que* f *est discontinue sur* $\mathbb{Q}$*.*
(3) *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*.*
(4) *Montrer que* f *est nulle part dérivable.*

2. Formules de Taylor

Exercice 8. *Utilisez le théorème des accroissement finis à une fonction convenable pour établir la divergence de la série harmonique* $\sum_n \frac{1}{n}$*.*

Exercice 9. *Montrer que* $\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x, \quad \forall\, x \in [0, \pi/2]$*, et représenter graphiquement cette inégalité (pour la première inégalité on pourra par exemple montrer que pour tout* $0 < x < \pi/2$*,il existe* $0 < \theta < x$ *tel que* $\sin(x)/x = \cos(\theta)$ *pour en déduire que la fonction* $f(x) = \sin(x)/x,\ x \in]0, \pi/2],\ f(0) = 1$ *est strictement décroissante sur* $[0, \pi/2]$*...).*

Exercice 10. *En appliquant le théorème des accroissements finis à* $x \mapsto \log(1 + x)$ *sur les segments* $[0, x/q]$ *et* $[x/q, x/p]$*, montrer que pour* $0 < p < q$ *:* $\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p < \left(1 + \frac{x}{q}\right)^q, \quad \forall\, x > 0.$

Exercice 11. (1) *Montrer que* $e^x \geq 1 + x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$*. En « déduire » l'inégalité arithmético-géométrique*

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} := G_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ a_1, a_2 \dots, a_n \geq 0,$$

et préciser le cas d'égalité (appliquer l'inégalité à $x = -1 + a_i/A_n,\ 1 \leq i \leq n$*...).*

(2) *(L'inégalité Arithmético-Géométrique version améliorée via Taylor-Lagrange) Pour* $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}_+$ *on note* $\overline{x_a} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},\ \overline{x_g} = (x_1 \dots x_n)^{1/n},\ M = \max_{1 \leq i \leq n} x_i,\ m = \min_{1 \leq i \leq n} x_i,\ \sigma^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$*.Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction* $\log$ *aux points* $\overline{x}, x_i \in [m, M]$ *pour en déduire* $\exp(\sigma^2/2M^2) \leq \frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}} \leq \exp(\sigma^2/2m^2)$*. Préciser le cas d'égalité.*

Exercice 12. *Soit* $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, montrer que* f *est continue à l'origine si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre* 0 *à l'origine ; montrer que* f *est dérivable à l'origine si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre* 1 *à l'origine (voir aussi l'exercice 4 questions 5 et 6).*

Exercice 13. *Soit* $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$*, si* $f(0) = 0$ *montrer que* $\lim_{x \to 0_+} \sum_{k=1}^{E(1/\sqrt{x})} f(kx) = f'(0)/2$*.*

Exercice 14. *Soit* $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fois dérivable, convexe et majorée : montrer que* f *est constante.*

Exercice 15. *Soient* $a, b, c \in \mathbb{R}_+^\star$ *trois réels deux à deux distincts. Déterminer les applications* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ *vérifiant* $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$*.*

Exercice 16. *Soit* $f \in \mathscr{C}^3([0, 1])$ *telle que* $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'(1) = f''(1) = 0$ *et* $f(1) = 1$*. Montrer qu'il existe* $0 < c < 1$ *tel que* $f^{(3)}(c) \geq 24$*.*

Exercice 17. ❤ *Calculer d'au moins trois manières différentes le développement limité à l'ordre* 3 *à l'origine de la fonction tangente*

Exercice 18. ❤ *Soit* $f(x) = \frac{1}{1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 2009x^{2010}}$*, que vaut* $f^{(2010)}(0)$ *? (commencez par écrire plus simplement* f *pour en déduire facilement un développement limité à l'ordre* 2010 *à l'origine...).*

Exercice 19. *On définit f sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) + \cos(x) & \textit{si } x > 0, \\ \cos(x) & \textit{sinon} \end{cases}$. *Montrer que f n'est pas paire mais que tous ses développements limités de f à l'origine sont sans termes de degré impair.*

Exercice 20. *Avec la formule de Taylor-Lagrange, montrer que le millième chiffre aprés la virgule dans l'écriture décimale de la racine carrée de $N = 111\ldots111 = (10^{1998} - 1)/9$ vaut 1.*

Exercice 21. ❤ *Calculer le développement limité à l'origine et à l'ordre 100 de $f(x) = \log\left(\sum_{k=1}^{99} x^k/k!\right)$.*

Exercice 22. ❤ *Donnez à la main une valeur approchée de $\log(1,003)$ avec une erreur inférieure à 10^{-8}.*

Exercice 23. ❤ *On définit la fonction exponentielle comme la solution de l'équation différentielle $y' = y,\ y(0) = 1$. Utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour montrer que $e := y(1) \in]5/2, 3[\setminus\mathbb{Q}$.*

Exercice 24. *Montrer que*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x\to 2_+} \left(2^x + 3^x - 12\right)^{\tan(\pi x/4)} = \exp\left[-\frac{4}{\pi}\left(4\log(2) + 9\log(3)\right)\right]$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1} = 1, \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{\mathrm{t}^2+\mathrm{t}}) - \mathrm{sh}(\sqrt{\mathrm{t}^2-\mathrm{t}})}{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t^2} - \dfrac{t^6}{6}\log^2(t)} = \frac{e-1}{2},, \quad \lim_{n\to+\infty}\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

$$\lim_{x\to 5}(6-x)^{1/(x-5)} = e^{-1}, \quad \lim_{x\to 0_+}\left(2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin(1/x)\right)^x = 1,$$

3. Applications

Exercice 25. *Soient $f, g \in \mathscr{C}^1([a,b])$ deux fonctions convexes vérifiant $f(a) = g(a),\ f(b) = g(b)$ et $g \leq f$ sur $[a,b]$. Montrer que la longueur du graphe de f sur $[a,b]$ est inférieure ou égale à celle de g (faites un dessin), i.e. $\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}dt \leq \int_a^b \sqrt{1+g'^2(t)}dt$.*

Exercice 26. *Montrer que dans $\mathbb{R}^d$, la ligne droite est le plus court chemin (parmi toutes les courbes de classe C^1) entre deux points (une géodésique).*

Exercice 27. *Montrer que sur la sphère $S(O,r)$ dans $\mathbb{R}^3$ les géodésiques entre deux points sont les méridiens (arcs de grand cercle).*

Exercice 28. ❤ *Existe-t-il $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^\star)$ vérifiant $f' = f\circ f$?*

Exercice 29. *Soit $f \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, montrer que*

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty$$

et en déduire une majoration (du même type) de l'erreur pour la méthode des trapèzes.

Exercice 30. *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(]-a,a[)$ telle que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est développable en série entière à l'origine.*

Exercice 31. *Soit $f\ :\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ une application dérivable vérifiant :*

$$\forall\, x \neq y \textit{ dans }]a,b[, \quad \exists!\ \zeta \in]a,b[\textit{ tel que } \quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\zeta),$$

montrer que f est soit strictement convexe, soit strictement concave sur $]a,b[$.

24 mai 2012 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr