☯ ☢ ☯ **AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES** ☯ ☢ ☯

Théorèmes de convergence 2 – Octobre 2011.

Exercice 1. *Pour $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle σ vérifiant $\mid \sigma \mid < 1$.*

(1) *Montrer que $f \ : \ t \in \mathbb{R}_+^\star \mapsto f(t) = \dfrac{\sinh(zt)}{\sinh(t)}$, $f(0) = z$, est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (et continue).*

(2) *Pour $t > 0$ développer f en série d'exponentielles et appliquer la convergence dominée a la suite des sommes partielles pour établir*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sinh(zt)}{\sinh(t)} dt = \sum_{n\geq 0} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}$$

(3) *Sachant (exercice classique des séries de Fourier...) que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ on a $\pi co\tan(\pi z) = \dfrac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{2z}{z^2 - n^2}$ en déduire que pour $2z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sinh(zt)}{\sinh(t)} dt = \frac{\pi}{2} \tan(\frac{\pi z}{2}).$$

(4) *On rappelle que (d.s.e.) pour $\mid z \mid < 1$ et $t > 0$: $f(t) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{(zt)^{2n+1}}{(2n+1)! \sinh(t)}$, montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sinh(zt)}{\sinh(t)} dt = 2 \sum_{n\geq 0} (1 - 2^{-2n-2}) \zeta(2n+2) z^{2n+1}.$$

où $\zeta(\alpha) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^\alpha}$. En déduire que pour $\mid z \mid < 1$

$$\frac{\pi}{2} \tan(\frac{\pi z}{2}) = 2 \sum_{n\geq 0} (1 - 2^{-2n-2}) \zeta(2n+2) z^{2n+1}.$$

Exercice 2. *Pour $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ on pose $a_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{nf(t)}{1+n^2t^2} dt$. Aprés avoir justifié la définition de a_n, montrer que la suite a_n converge et préciser sa limite.*

Exercice 3. *On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}_+^\star$: $f_n(x) = \dfrac{1}{x^{1/n}(1 + x/n)^n}$.*

(1) *Montrer que l'intégrale impropre $I_n := \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt$ converge si et seulement si $n \geq 2$.*

(2) *Montrer que pour tout $x \geq 1$ et $n \geq 2$: $|f_n(x)| \leq 4/x^2$.*

(3) *Montrer que la suite $(I_n)_2^\infty$ converge et préciser sa limite.*

On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \int_1^\infty e^{-t^n} dt$. Après avoir justifié la définition de a_n, montrer que la suite a_n converge, préciser sa limite et donner un équivalent de a_n.

Exercice 4. *Soit $f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2xt) dt$. Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ de réels telle que $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n, \ \forall x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 5. *Montrer que :* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} = \int_0^1 x^x dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x} dx,.$

Exercice 6. *Etudier sur son domaine de définition la fonction définie par* $f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx}\log(t)dt$. *Trouver une équation différentielle vérifiée par* f. *En déduire la forme explicite de* f.

Exercice 7. *Soit* $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^u \frac{\sin(xu)}{u} du$.

(1) *Montrer que* f *est indéfiniment dérivable sur son domaine définition.*
(2) *Montrer que sur* $]-1,1[$ *on a un développement sous la forme* $f(x) = \sum_n a_n x^n$.
(3) *En déduire* f *sur* $]-1,1[$. *Montrer que cette expression subsiste sur tout* $\mathbb{R}$.

Calcul de **l'intégrale de Dirichlet** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt$. On considère les applications $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t+x}dt$, $g(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t^2+1}dt$.

(1) Montrer que f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^\star$.
(2) Montrer que f et g sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.
(3) Montrer que $f - g$ est 2π-périodique.
(4) Montrer que f et g sont équivalentes à $\frac{1}{x}$ en $+\infty$ puis que $f = g$.
(5) En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 8. *Calcul de* ***l'intégrale de Gauss*** $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$. *Soient* $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *les fonctions définies par* $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}dt$ *et* $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$.

(1) *Montrer que* f *et* g *sont de classe* C^1. *Donner une expression de* f' *et de* g'.
(2) *Calculer* $f(0)$.
(3) *Montrer que* $f' = -(g^2)'$.
(4) *Montrer que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. *Justifier votre réponse.*
(5) *Déduire de cette étude la valeur de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt$.

Exercice 9. $\mathscr{E}([a,b])$ *est l'ensemble des fonctions de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *nulles en dehors de* $[a,b]$.

(1) *Soit* $f \in \mathscr{E}([a,b])$, *montrer l'existence de* $\nu(f) = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{f(x)}{x}dx$.
(2) *Montrer qu'il existe deux constantes* α, β *ne dépendant que des réels* a *et* b *telles que* $|\nu(f)| \leq \alpha\|f\| + \beta\|f'\|_\infty$ *pour toute fonction* $f \in \mathscr{E}([a,b])$.
(3) *Peut-on choisir* $\beta = 0$ *?*

Exercice 10. *Soient* $p, q \in \mathbb{R}_+^\star$, *montrer que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{nq+p}$.

9 octobre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mél : lassere@math.ups-tlse.fr