Université Paul Sabatier **Novembre 2011**

☯ ☢ ☯ **MASTER Maths Physique Chimie Enseignement – Devoir Préparé 4** ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, \pi/4]$ par $f(x) = 1/\cos(x)$ ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_0 = \pi/4$ et $I_n = \int_0^{\pi/4} f(t)^n dt$ pour $n \geq 1$.*

(1) *Etudier et représenter assez soigneusement les variations de f sur I.*

(2) *Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. On notera $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque.*

(3) *Sur le graphique précédent représenter la courbe représentative de f^{-1}.*

(4) *Montrer que pour tout $y \in J$: $\cos(f^{-1}(y)) = 1/y$ et $\sin(f^{-1}(y)) = \sqrt{1 - 1/y^2}$.*

(5) *Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ avec $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$.*

(6) *Donner le développement limité de f^{-1} au point $\sqrt{2}$ à l'ordre 1.*

(7) *Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ il existe un polynôme P_n tel que*

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}, \quad \forall\, x \in I.$$

(8) *Déterminer les polynômes P_1 et P_2.*

(9) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $P_{n+1} = (1 - x^2)P_n' + (n+1)xP_n$. en déduire P_3.*

(10) *Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.*

(11) *Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et calculer I_2.*

(12) *Déterminer des réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1-t}$, $t \neq \pm 1$.*

(13) *En posant $t = \sin(x)$, calculer I_1.*

(14) *Montrer que la suite est monotone.*

(15) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $I_n \geq \int_{\pi/4-1/n^2}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^n(x)} \geq \frac{1}{n^2\cos^n(\pi/4-1/n^2)}$.*

(16) *En déduire $\lim_n I_n$.*

(17) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$.*

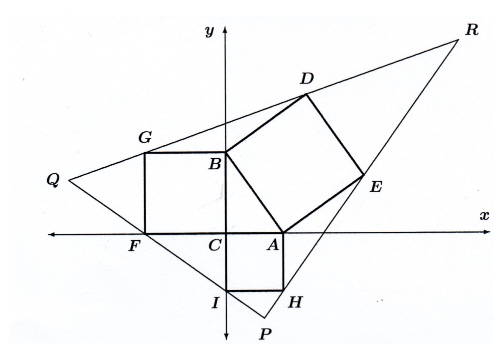
Exercice 2. (1) *Quel est l'ensemble $\mathscr{E}$ des nombres complexes de module 1 vérifiant $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \leq |1 + z|$? le représenter graphiquement.*

(2) *Soit $\mathscr{Z}$ l'ensemble des racines de l'équation $z^{2011} - 1 = 0$; on choisit au hasard (les tirages sont équiprobables) une racine $u \in \mathscr{Z}$. Quelle est la probabilité que $\sqrt{2+\sqrt{3}} \leq |1 + u|$?*

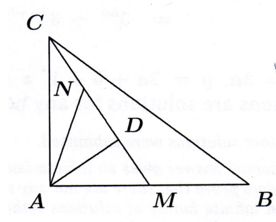
Exercice 3. *Les trois exercies sont indépendants.*

(1) *On suppose que les longueurs d'un triangle sont trois entiers consécutifs et que l'angle le plus grand est le double du plus petit. Déterminer les longueurs du triangle.*

(2) *Soit ABC un triangle rectangle en C. On pose $BC = a$, $CA = b$. On construit à l'extérieur du triangle les carrés $ABDE$, $BCFG$ et $CAHI$. Les droites passant par FI et EH se rencontrent en P, celles passant par FI et DG se coupent en Q et enfin celles par DG et EH se coupent en R. Montrer que le triangle PQR est rectangle, si et seulement si $b/a = \sqrt{2}/2$ et il sera rectangle en P.*



(3) *Soit ABC un triangle rectangle en A et M le milieu de AB. Dans le triangle ACM, la hauteur issue de A rencontre CM en D ; enfin, N est le milieu de CD. Montrer que $BD \perp AN$.*



4 novembre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr