Université Paul Sabatier **26 Septembre 2010**

☯ ☢ ☯ **MASTER Maths Physique Chimie Enseignement – Devoir Préparé 1** ☯ ☢ ☯

Problème 1 : Soit $P(x) = x^3 - x + 1$.

(1) Montrer que P admet une unique racine réelle que l'on notera α. Vérifier que $\alpha < -1$.
(2) Montrer que P admet deux autre racines β et γ vérifiant $\beta = \overline{\gamma}$.
(3) Montrer que $|\beta| < 1$.
(4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$. Calculer u_0, u_1 et u_2.
(5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+3} - u_{n+1} + u_n = 0$.
(6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$.
(7) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} |\alpha|^n$.
(8) Déterminer (si elle existe) $\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi\alpha^n)$.

Problème 2 : Pour $n \geq 1$ on définit a_n comme le plus petit entier tel que

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 1.$$

(1) Montrer que a_n est bien défini et que pour tout $n \geq 2$: $2n - 1 < a_n < 3n - 2$.
(2) Montrer que si la suite $(a_n/n)_n$ converge, alors $2 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq 3$.
(3) Montrer successivement

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n},$$
$$1 - \frac{1}{n} < \log\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq 1.$$

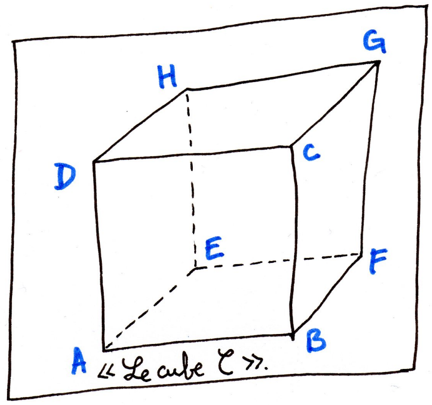
(4) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = e$.

Problème 3 : L'objectif de ce problème est de déterminer les solutions $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ de l'équation fonctionnelle

$$(\bigstar) \qquad f(x)f(yf(x)) = f(x+y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^\star.$$

(1) Soit $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ une telle solution.
  (a) Montrer que $f \leq 1$ (s'il existe $a \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $f(a) > 1$, considérez $y = a(f(a)-1)^{-1}$).
  (b) En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
  (c) On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $f(b) = 1$. Montrer que $f \equiv 1$.
(2) Dorénavant $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ désignera une solution (s'il en existe) de l'équation $(\bigstar)$ vérifiant $f(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$.
  (a) Montrer que f est strictement décroissante.
  (b) Montrer que f est injective.
  (c) Montrer que $f(x)f(yf(x)) = f(yf(x))f\big([x + y(1 - f(x))]f(yf(x))\big)$.
  (d) En déduire que $x = [x + y(1 - f(x))]f(yf(x))$.
  (e) Montrer que f est de la forme $f_a(x) = \frac{1}{1+ax}$ où $a \geq 0$.
  (f) Résoudre l'équation fonctionnelle $(\bigstar)$.

Problème 4 : Un point se déplace aléatoirement d'un sommet d'un cube $\mathscr{C}$ à un autre. A chaque station, il choisit la station suivante parmi les trois sommets adjacents au sommet où il se trouve. Le choix s'effectue de façon équiprobable et indépendante du trajet déjà effectué.



(1) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer le nombre T_n de trajets possibles en $2n$ étapes (on rappelle que le point part de A).

(2) Soit $n \geq 3$, montrer qu'à la n-ième station le point se trouvera sur les sommets A, C, F, H si n est pair et D, B, E, G si n est impair.

(3) On note S_n le nombre de trajets en $2n$ étapes tels que le point se retrouve en A à l'issue de la $2n$-ième étape. Par convention, $S_0 = 1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{n+1} = S_n + 2 \cdot 3^{2n}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 1 + \dfrac{3^{2n} - 1}{4}$.

(4) Quelle est la probabilité pour que le point soit en A à l'issue de la $2n$-ième étape ?

(5) Quelle est la probabilité pour que le point ne soit jamais [1] repassé en A à l'issue de la $2n$-ième étape ? En déduire le nombre de tels chemins.

(6) Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^\star$ la probabilité p_n pour que le premier retour en A s'effectue à l'issue de la $2n$-ième étape.

(7) Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$? Interprétation ?

Problème 5 :

(1) Soit x un nombre irrationnel, montrer qu'il existe une infinité de nombres rationnels m/n vérifiant $|x - \frac{m}{n}| < \frac{1}{2n}$.

(2) On se propose de montrer qu'il n'existe pas une infinité de nombres rationnels m/n vérifiant $|\sqrt{2} - \frac{m}{n}| < \frac{1}{5n^2}$. Pour cela, on suppose qu'il existe un nombre rationnel m/n vérifiant $|\sqrt{2} - \frac{m}{n}| < \frac{1}{5n^2}$ et $n > 10$.
   (a) Montrer que $1 < \frac{m}{n} < 2$.
   (b) Montrer que $0 < \frac{m}{n} - \frac{1}{5n^2} < \sqrt{2} < \frac{m}{n} + \frac{1}{5n^2}$.
   (c) En déduire que $m^2 - \frac{2m}{5n} + \frac{1}{25n^2} < 2n^2 < m^2 + \frac{2m}{5n} + \frac{1}{25n^2}$.
   (d) Montrer que $m^2 - 1 < 2n^2 < m^2 + 1$.
   (e) Conclure.

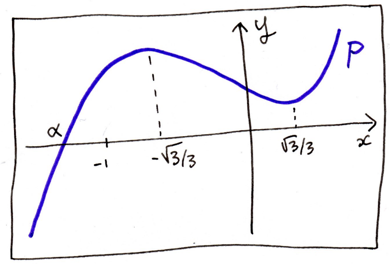
20 octobre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

1. Vous pouvez appliquer aprés l'avoir démontrée la formules des probabilités composées : si $P(\cap_{1 \leq k \leq n} V_k) > 0$ alors $P(\cap_{1 \leq k \leq n} V_k) = P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) \ldots P(V_n/V_1 \cap \cdots \cap V_{n-1})$. Au niveau terminale : démontrer cette formule à partir de la formule de Bayes.

Petit Corrigé du devoir préparé

Problème 1 :

(1) On a $P'(x) = 3x^2 - 1$, P est donc (voir le petit dessin ci-contre) croissante sur $]-\infty, -\sqrt{3}/3]$ puis décroissante sur $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$ et enfin croissante sur $]\sqrt{3}/3, +\infty[$. Comme $P(\sqrt{3}/3) = 1 - 2\sqrt{3}/9 > 0$, P ne s'annule pas sur $]-\sqrt{3}/3, +\infty[$. P admet donc une unique racine $\alpha \in]-\infty, -\sqrt{3}/3]$, et comme $P(-1) = 1 > 0$ on aura $\alpha < -1$.



(2) $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ où Q est de degré 2. Les autres racines de P sont celles de Q donc au nombre de 2 : $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Elles sont conjuguées car P est à coefficients réels, en effet $P(\beta) = 0$ implique (P est à coefficients réels) que $\overline{P(\beta)} = P(\overline{\beta}) = 0$ et $\beta \neq \overline{\beta}$ donne $\gamma = \overline{\beta}$.

(3) On peut exprimer β et γ en fonction de α mais ce n'est pas utile. Observons plutôt la factorisation qui se déduit des questions précédentes $P(x) = x^3 - x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. En identifiant les termes constants on obtient $\alpha\beta\gamma = \alpha|\beta|^2 = -1$ soit $|\beta|^2 = -1/\alpha$. Comme $\alpha < -1$ on a bien $|\beta| < 1$.

(4) $u_0 = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 3$. En identifiant les coefficients de x et x^2 dans $P(x) = x^3 - x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ on trouve

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -1$$

donc $u_1 = 0$ et

$$u_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 2.$$

(5) $P(\alpha) = \alpha^3 - \alpha + 1 = 0$ implique $\alpha^{n+3} - \alpha^{n+1} + \alpha^n = 0$. On a la même égalité avec β et γ. En les additionnant on obtient $u_{n+3} - u_{n+1} + u_n = 0$.

(6) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $n = 0, 1$ et 2. Supposons le résultat vrai au rang $n \geq 2$. Alors $u_{n+1} = u_{n-1} + u_{n-2} \in \mathbb{Z}$, d'où la propriété au rang $n+1$. Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$.

(7) On a vu dans la première question que $|\alpha| > 1$, par conséquent $\lim_{n\to+\infty} |\alpha^n| = +\infty$.

(8) Comme $\lim_{n\to+\infty} |\alpha^n| = +\infty$ l'existence même de la limite $\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi\alpha^n)$ n'est pas claire. Cependant, comme $u_n \in \mathbb{Z}$

$$\sin(\pi\alpha^n) = \sin(\pi(u_n - \beta^n - \gamma^n)) = (-1)^{u_n+1}\sin(\pi(\beta^n + \gamma^n)).$$

Mais, d'après (3) : $|\gamma^n + \beta^n| \leq |\beta|^n + |\gamma|^n = 2|\beta|^n$ et $\lim_n |\beta|^n = 0$ (car $|\beta| < 1$). La suite $(\pi(\beta^n + \gamma^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite réelle (car $\gamma^n = \overline{\beta}^n$) qui tends vers 0. Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi\alpha^n) = 0$. ■

Problème 2 :

(1) Pour $n \geq 2$ on a

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1,$$

et par une facile récurrence on montrer que

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} < 1.$$

Donc $2n-1 < a_n \leq 3n-2$ et, si la suite $(a_n/n)_n$ converge ce sera vers une limite l vérifiant $2 \leq l \leq 3$.

(2) De la définition de a_n on a

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

En comparant avec l'intégrale sur $[n, a_n]$ de $1/t$ on a aussi

$$1 - \frac{1}{n} < \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} < \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leq 1.$$

On a donc

$$1 - \frac{1}{n} < \log\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq 1,$$

i.e.

$$\exp\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{a_n}{n} < e.$$

Par encadrement, la suite est bien convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = e.$ ■

Problème 3 :

(1) (a) S'il existe $a \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $f(a) > 1$, posons $y = a(f(a)-1)^{-1} \in \mathbb{R}_+^\star$. On a alors $f(a)f(yf(a)) = f(a+y) = f(a+a(f(a)-1)^{-1}) = f(yf(a))$. Soit $f(yf(a))\,(f(a)-1) = 0$ ce qui est absurde puisque $f(a) > 1$ et $f > 0$.

(b) Soient $0 < x < x' = x+y$ avec $y > 0$. Vu ce qui précède $f(yf(x)) \leq 1$ donc $f(x') = f(x+y) = f(x)f(yf(x)) \leq f(x)$. f est bien décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(c) On suppose qu'il existe $b > 0$ tel que $f(b) = 1$. Comme f est ≤ 1 et décroissante on a déjà $f \equiv 1$ sur $]0, b]$. Avec ($\bigstar$) on a $f(y) = f(b+y)$, $\forall\, y > 0$. En particulier pour tout $n \geq 1 : 1 = f(b) = f(2b) = \ldots f(nb)$. comme f est décroissante, ceci implique que f est constante et égale à 1 sur $[1, +\infty[$. $f \equiv 1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(2) (a) Si $f < 1$ en reprenant mot à mot la démonstration de la question (1-b) on prouve que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(b) Si f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ alors f est injective sur $\mathbb{R}_+^\star$ (il suffit de l'écrire).

(c) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, nous avons

$$\begin{aligned} f(x)f(yf(x)) &= f(x+y) = f(x + y(1-f(x)) + yf(x)) \\ &= f\Bigg(\underbrace{yf(x)}_{a} + \underbrace{x + y(1-f(x))}_{b}\Bigg) = f(a)f(bf(a)) \\ &= f(yf(x))f\big([x+y(1-f(x))]f(yf(x))\big) \end{aligned}$$

.

(d) $f(x)f(yf(x)) = f(yf(x))f\big([x+y(1-f(x))]f(yf(x))\big)$ implique (comme f est non nulle) $f(x) = f\big([x+y(1-f(x))]f(yf(x))\big)$ soit, puisque f est injective $x = [x+y(1-f(x))]f(yf(x))$.

(e) Nous avons pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^\star : x = [x+y(1-f(x))]f(yf(x))$. Faisons $x = 1$ et $y = t/f(1)$. On tire immédiatement $f(t) = f_a(t) = \frac{1}{1+at}$ avec $a = (1-f(1))/f(1) > 0$.

(f) Réciproquement on vérifie facilement que toutes ces fonctions f_a sont solutions de l'équation.

Problème 4 :

(1) Chaque sommet est relié à trois autre sommets : le nombre T_n de trajets possibles en $2n$ étapes est donc égal à $T_n = 3^{2n}$.

(2) Après le premier mouvement on se trouve parmi l'un des sommets $\{B, D, E\}$, après le second $\{A, C, F, H\}$ au troisième $\{B, D, E, G\}$ donc $\{A, C, F, H\}$ pour le quatrième mouvement : on se retrouve donc dans la même situation qu'après le second mouvement. Et ainsi de suite, la boucle est bouclée...

(3) (a) On peut diviser un trajet se terminant en A au bout de $2n+2$ mouvements en deux ensembles disjoints : ceux qui passent par A au $2n$-ième mouvement et les autres.

– Si on se trouve au sommet A à la $2n$-ième étape (S_n tels chemins) il reste trois possibilités pour se retrouver en A à la $2n+2$-ième étape : ABA, ADA, AEA. Ce qui nous donne $3S_n$ chemins.

– Maintenant si au $2n$-ième mouvement nous ne sommes pas sur le sommet A (il y a donc $3^{2n} - S_n$ tels chemins de longueur $2n$), vu la question (2) nous sommes soit en C soit en F soit en H et dans chacun de ces cas il existe deux possibilités ($HDA, HEA, FBA, FEA, CBA, CDA$) d'atteindre le sommet A à la $2n+2$-ième étape . Nous avons donc $2(3^{2n} - S_n)$ tels chemins.

Ainsi $S_{n+1} = 3S_n + 2(3^{2n} - S_n) = S_n + 2 \cdot 3^{2n}$.

(b) On somme pour $0 \leq k \leq n-1$ la formule précédente, après simplification il reste

$$S_n = S_0 + 2(3^0 + 3^2 + \cdots + 3^{2(n-1)}) = 1 + 2\frac{3^{2n}-1}{9-1} = 1 + \frac{3^{2n}-1}{4}.$$

(4) Avec les notations précédentes $p_n = \dfrac{1 + \frac{3^{2n}-1}{4}}{3^{2n}}$.

(5) On note V_n l'évènement $\{$le point n'est pas en A à l'instant $2n\}$. On cherche donc la probabilité de $\cap_{1 \leq k \leq n} V_k$. Par la formule des probabilités composées, on a

$$\begin{aligned} P\big(\cap_{1\leq k\leq n} V_k\big) &= P(V_1)\cdot P(V_2/V_1)\dots P(V_n/V_1\cap\cdots\cap V_{n-1}) \\ &= P(V_1)\cdot P(V_2/V_1)\dots P(V_k/V_{k-1})\dots P(V_n/V_{n-1}) \\ &= P(V_1)\cdot \big(P(V_2/V_1)\big)^{n-1} \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité justifiée par le fait que la position du point à l'instant k ne dépend que de sa position à l'instant $k-1$ (propriété de Markov)

$P(V_1) = 6/9$ se calcule facilement en dénombrant les cas favorables parmi les possibles. On calcule de même $P(V_2/V_1)$. Pour cela il suffit de dénombrer : V_1 étant réalisé, après le second mouvement nous sommes en H, C ou F. Si on se trouve en H on a neuf possibilités pour deux sauts : $HGF, HGC, HGH, HDA, HDH, HDC, HEF, HEA, HEH$. Donc sept chemins ne passant pas par le sommet A. Il est est de même il si après le second mouvement on se trouve en Cou F. Il y a donc 21 chemins favorables sur les 27 possibles : $P(V_2/V_1) = 21/27 = 7/9$. Finalement, la probabilité cherchée est

$$P\big(\cap_{1\leq k\leq n} V_k\big) = P(V_1)\cdot\big(P(V_2/V_1)\big)^{n-1} = \frac{6}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} = \frac{6\cdot 7^{n-1}}{3^{2n}}.$$

Les chemins étant équiprobables, le nombre de tels chemins est $3^{2n}P\big(\cap_{1\leq k\leq n} V_k\big) = 6\cdot 7^{n-1}$.

(6) Avec les notations précédentes, on a $p_1 = P(V_1^c) = 1/3$ et pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} p_n &= P\big(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1} \cap V_n^c\big) \\ &= P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) \dots P(V_k/V_{k-1}) \dots P(V_{n-1}/V_{n-2}) P(V_n^c/V_{n-1}) \\ &= \frac{6}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{n-2} \frac{2}{9} = \frac{12 \cdot 7^{n-2}}{9^n} \end{aligned}$$

(7) Sauf erreur, on trouve :

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \cdots + p_n &= \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{n} \frac{12 \cdot 7^{n-2}}{9^n} = \frac{1}{3} + \frac{12}{9^2} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{7}{9}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} + \frac{12}{81} \cdot \frac{1 - (7/9)^{n-1}}{1 - 7/9} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\big(1 - (7/9)^{n-1}\big) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1. \end{aligned}$$

$\blacksquare$