1. Q.C.M.

(1) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge dès que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(3) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ La série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n^2)$ converge.

(4) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ La série $\sum_{n=1}^{\infty} cos(1/n^2)$ converge.

(5) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ est aussi convergente.

(6) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ est aussi convergente.

(7) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+a_n}{3^n+a_n}$ converge.

(8) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+a_n}{2+a_n}$ converge.

(9) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{5+n}$ converge et a pour somme $1/5$.

(10) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ La série $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 4^{-n+1}$ converge et a pour somme 1.

(11) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ Si la suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\geq 1}$ de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est majorée, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(12) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et si la suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\geq 1}$ de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est bornée, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(13) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

(14) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

(15) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

(16) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ est décroissante et si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

(17) $\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{?}$ Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)$ converge.

(18) O N ? Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ et $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^\infty \sin(a_n)$ converge.

(19) O N ? $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2011} < 1$.

(20) O N ? La série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\log(n^6+1)}$ converge.

(21) O N ? La série $\sum_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ converge.

(22) O N ? La série $\sum_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge.

(23) O N ? Si $a_n \le b_n \le 0$ et si $\sum_{n=1}^\infty b_n$ diverge alors la série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge.

(24) O N ? Si $a_n \le b_n \le 0$ et si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^\infty b_n$ converge.

(25) O N ? Si $0 \le a_n \le b_n$ et si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge alors la série $\sum_{n=1}^\infty b_n$ diverge.

(26) O N ? Si $0 \le a_n \le b_n$ et si $\sum_{n=1}^\infty b_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge.

(27) O N ? $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right) = \frac{1}{7}$.

(28) O N ? $\sum_{n=1}^\infty n \cdot 2^{-n} = 2$.

(29) O N ? $0.99999\cdots = \sum_{n=1}^\infty 9 \cdot 10^{-n} = 1$.

(30) O N ? Si la suite $(a_n)_n$ n'est pas convergente, alors la série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge.

(31) O N ? Si la série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge alors la suite $(a_n)_n$ n'est pas convergente.

(32) O N ? Si $a_n > 0$ et $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$.

(33) O N ? Si $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$ alors $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge.

(34) O N ? Si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge alors $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ diverge.

(35) O N ? Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ alors la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{a_n+n^2}$ converge.

(36) O N ? Si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n+n^2}$ converge.

(37) O N ? Si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}}{a_n+n^2}$ diverge.

(38) O N ? Si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{a_n+n^2}$ diverge.

2. Exercices

Exercice 1. *On définit la suite* $(u_n)_n$ *par* $u_0 = 5$ *et* $u_{n+1} = u_n + 1/u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(1) *Montrer que* $(u_n)_n$ *est strictement monotone.*
(2) *Montrer que* $\lim_n u_n = +\infty$.
(3) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 1/u_n^2$.
(4) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n^2 = 25 + 2n + \frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{u_1^2} + \cdots + \frac{1}{u_{n-1}^2}$.
(5) *En déduire que* $u_n \geq \sqrt{25+2n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$.
(6) *On pose* $f(t) = \frac{1}{25+2t}$, *dé déduire des questions précédentes que* $u_n^2 \leq 25 + 2n + f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$.
(7) *Montrer que* $u_n^2 \leq 25 + 2n + \int_{-1}^{n-1} f(t)dt$.
(8) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{25+2n} \leq \sqrt{25 + 2n + \log\sqrt{\frac{2n+23}{23}}}$.
(9) *Montrer que* $45 < u_{1000} < 45,1$.
(10) *Donner un équivalent de* u_n.

Exercice 2. *Donner de deux manières différentes le développement limité à l'ordre 3 en* $x = 5$ *de* $f(x) = 1/x$. *Même question en* $x = 6$ *avec* $g(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 3. *On considère une urne contenant 2011 boules rouges et 2011 boules blanches. On tire deux boules de l'urne et*
– *on les met de coté si elles sont de la même couleur.*
– *on met la noire de coté et on remet la rouge dans l'urne sinon.*
On recommence le processus tant qu'il reste au moins deux boules dans l'urne. Quelle est la probabilité que le processus s'achève avec une boule rouge dans l'urne ?

Exercice 4. *On jette deux dés et soit* S *la variable aléatoire « somme des deux faces ».*

(1) *Déterminer la loi de* S *lorsque les dés sont équilibrés.*
(2) *On va montrer qu'il n'est possible de piper les deux dés de telle sorte que* S *soit équidistribuée (i.e.* $P(S = k) = 1/11$ *pour tout* $2 \leq k \leq 12$*). Supposons que ce soit le cas et posons* $a = P(D_1 = 1), b = P(D_2 = 1)$ *et* $c = P(D_1 = 6), d = P(D_2 = 6)$ *(*D_1 *et* D_2 *sont les deux dés).*
   (a) *Calculer* ab *et* cd.
   (b) *Montrer que* $ad + bc \leq 1/11$ *puis* $\frac{a}{11c} + \frac{c}{11a} \leq \frac{1}{11}$.
   (c) *Montrer que pour tous* $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$: $x/y + y/x \geq 2$.
   (d) *En déduire que* $\frac{a}{11c} + \frac{c}{11a} \geq \frac{2}{11}$ *et conclure.*

Exercice 5. *Soient* $a, b, \theta \in \mathbb{R}$.

(1) *Calculer* A^n *où* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
(2) *Calculer* A^n *où* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ *(on pourra utiliser la décomposition* $A = (a-b)I_2 + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
(3) *Calculer* A^n *où* $A = \begin{pmatrix} a + \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & a - \cos\theta \end{pmatrix}$. *En déduire lorsque cela a un sens* $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^N A^k$.

4 novembre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr