ℹ `Durée 4 heures : pas de documents et téléphones, calculatrice déconseillées.`
`les logarithmes sont tous népériens !`

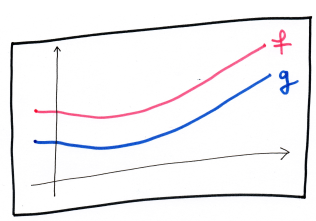
1. Q.C.M.

(1) Soit $I = \int_1^2 t^2 e^{t^2} dt$. Alors
- (a) $I \leq 0$.
- (b) $0 < I \leq 10$.
- (c) $10 \leq I < 100$.
- (d) $100 \leq I < 1000$.
- (e) $I \geq 1000$.

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire et dérivable. Parmi les affirmations suivantes préciser (en justifiant vos choix) celles qui **sont toujours vraies**, **ne sont jamais vraies**, **peuvent être vraies**.
- (a) $f(0) = 0$.
- (b) f' est impaire.
- (c) f' est paire.
- (d) f' peut être ni paire ni impaire.
- (e) $f'(0) = 0$.
- (f) $f''(0) \neq 0$.

(3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$. Parmi les affirmations suivantes préciser (en justifiant vos choix) celles qui **sont toujours vraies**, **ne sont jamais vraies**, **peuvent être vraies**.
- (a) $f'(2) = 2$.
- (b) $f(2) = 0$.
- (c) $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.
- (d) f est continue en $x = 0$.
- (e) f est continue en $x = 2$.
- (f) f présente en $x = 2$ un maximum ou un minimum local.

(4) Dans la figure ci-contre, on observe le graphe de deux fonctions dérivables f et g définies sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f' - g'$?



(5) Parmi les applications suivantes, préciser (en justifiant vos choix) celles qui dérivables à l'origine et dans ce cas préciser $f'(0)$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$.

(b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$.

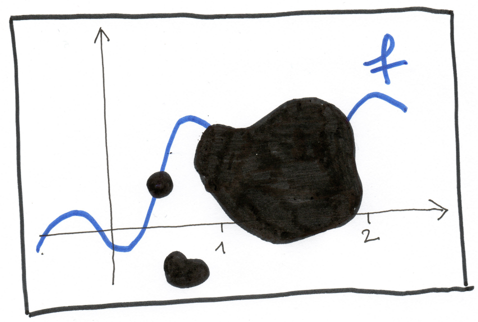
(c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$.

(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x+1 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$.

(e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 \sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0. \end{cases}$.

(6) En dessinant le graphe de ma fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois continuement dérivable j'ai fait une grosse tache d'encre noire... A votre avis, laquelle des trois intégrales ci-dessous est forcément positive ?

$$(a) \int_1^2 f(t)dt, (b) \int_1^2 f'(t)dt, (c) \int_1^2 f''(t)dt.$$



(7) Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une application continue vérifiant $2 \leq f(x) \leq 4$. Parmi les valeurs suivantes préciser (en justifiant vos choix) les plus grandes et plus petites valeurs possible pour $\int_0^2 f(t)dt$.

$a)$ 0, $b)$ 2, $c)$ 4, $d)$ 6, $e)$ 8.

(8) Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications deux fois continuement dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soient les affirmations :

(a) $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f''(x) \leq g''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\int_0^1 f(t)dt \leq \int_0^1 g(t)dt$.

Alors

(a) Aucune de ces affirmations n'est obligatoirement vraie..

(b) Le première seulement est vraie.

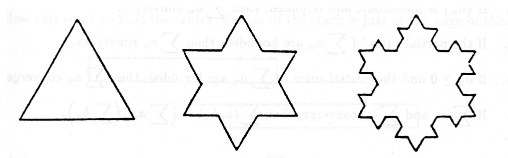
(c) La troisième seulement est vraie.

(d) La première et la seconde seulement sont vraies.

(e) Les trois sont vraies.

2. Problème 1

On construit une suite de figures géométriques $T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$ de la manière suivante : T_0 est un triangle équilatéral de longueur de coté 1. On construit T_1 à partir de T_0 en remplaçant le tiers médian de chaque coté du triangle T_0 par un nouvel triangle équilatéral (de longueur 1/3). De la même manière, T_2 se déduit de T_1 en remplacant le tiers médian de chaque coté de T_1 par un triangle équilatéral (de longueur 1/9). Et ainsi de suite. La figure ci-dessous représente T_0, T_1 et T_2. (la « limite » de ces figures est connu comme le flocon de Koch, voir ici).



(1) Déterminer l'aire d'un triangle équilatéral de coté de longueur s.
(2) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre de cotés de la figure T_n et préciser leur longueur.
(3) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le périmètre P_n de T_n
(4) Préciser la $\lim_{n\to+\infty} P_n$.
(5) Déterminer à chaque étape l'accroissement d'aire $\mathscr{A}(T_{n+1}) - \mathscr{A}(T_n)$.
(6) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'aire $\mathscr{A}(T_n)$ de T_n.
(7) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}(T_n)$.
(8) Existe-t-il une contradiction entre les questions (3) et (6) ?

3. Problème 3

L'objectif de ce problème est l'étude de quelques propriétés des solutions de l'équation fonctionnelle $f \circ f = \exp$ (on poursuivra cette étude dans de prochaines séances).

On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $f \circ f = \exp$.

(1) Démontrer que toute solution x de l'équation $f(x) = x$ est aussi solution de l'équation $e^x = x$.
(2) En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution.
(3) En déduire que $f(x) - x$ est de signe constant pour x réel.
(4) Démontrer qu'il est impossible que, pour tout réel x, on ait $f(x) < x$.
(5) Déduire que, pour tout réel x, $f(x) > x$.
(6) Démontrer que pour tout réel x, $f(x) < e^x$.
(7) Démontrer que $f(0)$ appartient à l'intervalle $]0;1[$.
(8) Démontrer que pour tout réel x, $f(e^x) = e^{f(x)}$ $(\bigstar)$.
(9) Déterminer la limite de f en $+\infty$
(10) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et montrer que cette limite est strictement négative.
(11) Démontrer que f est injective. En déduire que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$, puis que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3 octobre 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

Solution du QCM :

(1) **Première question :** Nous avons $I = \int_1^2 t^2 e^{t^2} dt \geq \int_{\sqrt{3}}^2 t^2 e^{t^2} dt \geq \int_{\sqrt{3}}^2 3e^3 dt = (2-\sqrt{3})3e^3 \geq 32^3/2 = 12$. De l'autre coté $I = \int_1^2 t^2 e^{t^2} dt \leq e^4 \int_1^2 t^2 dt = e^4 \leq 3^4 = 81$. Soit $12 < I < 81$ et c'est bien la seconde réponse qui est la bonne.

(2) **Seconde question :** Le (a) est toujours vrai car f impaire implique $f(0) = f(-0) = -f(0)$ donc $f(0) = 0$. Le (b) est toujours faux (sauf bien sur si f est identiquement nulle) car f impaire et dérivable implique en dérivant $f(-x) = -f(x)$ que $f'(-x) = f'(x)$ i.e. f' est paire et c'est (c) qui est toujours vrai. Comme f' est toujours paire, (d) n'est jamais vrai. (e) peut être faux, par exemple considérer $f(x) = x$ pour qui $f'(0) = 1$ mais peut être vrai ($f(x) = x^3$). (f) est toujours faux car f' paire implique f'' impaire donc vu (a) : $f''(0) = 0$.

(3) **Troisième question :** L'hypothèse $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$ nous dit que f est dérivable en $x = 2$ avec $f'(2) = 0$, donc (a) est toujours faux. (b) peut être vrai $f(x) = (x-2)^2$ ou faux $f(x) = (x-2)^2+1$. Comme f est dérivable en $x = 2$ elle y est continue donc (c) est vrai. On a aucune information sur ce qui se passe en zéro donc (d) peut être vrai ou faux. (e) équivaut à (c) donc est vrai. (f) n'a aucune raison d'être vrai, considérer $f(x) = (x-2)^3$ mais peut l'être : $f(x) = (x-2)^2$.

(4) **Quatrième question :** Visiblement $f - g$ est constante, donc $(f-g)' = f' - g' = 0$.

(5) **Cinquième question :** (a) $f(0) = 0$ et en calculant le taux d'accroissement : $f'_g(0) = 0 = f'_d(0)$ donc f est dérivable en $x = 0$ avec $f'(0) = 0$. (b) $f(0) = 0$ et en calculant le taux d'accroissement : $f'_g(0) = 1 \neq 0 = f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en $x = 0$. (c) $f(0) = 0$ et en calculant le taux d'accroissement : $f'_g(0) = 2 \neq 1 = f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en $x = 0$. (d) $\lim_{x\to 0_-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0_+} f(x)$, f n'est pas continue à l'origine et ne peut donc y être dérivable. (e)$\lim_{x\to 0} f(x) - f(0)/x = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$ car la fonction sinus est bornée. Donc f est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$

(6) **Sixième question :** Vu l'allure du graphe visible de f et la taille de la tache on doit avoir $\int_1^2 f(t)dt \geq 0$. Pour les deux autres intégrales on ne peut rien dire car la dérivée mesure la monotonie et la dérivée seconde la convexité sur lesquelles tout peut arriver a l'intérieur de la tache.

(7) **Septième question :** On aura $4 = \int_2^4 2dt \leq \int_2^4 f(t)dt \leq \int_2^4 4dt = 8$. La plus petite valeur est 4 et la plus grande 8.

(8) **Huitième question :** Les deux premières propriétés n'ont aucunes raisons d'etre vraies. Par exemple $f(x) = \mathrm{artan}(x) \leq g(x) = \pi/2$ alors que $g'(x) < f'(x)$. Pour la seconde, considérez $f(x) = 2$ et $g(x) = \cos(x)$ (c'est aussi un contre exemple pour la première). La troisième propriété est toujours vraie. Ainsi, parmi les 5 propositions, seule la (c) est vraie.

Solution du problème 1 :

(1) Par un calcul classique, l'aire d'un triangle équilatéral de coté de longueur s vaut $s^2\sqrt{3}/4$.

(2) T_0 possède 3 cotés ; de là, lorsque l'on passe de T_n à T_{n+1} chaque coté de T_n donne naissance à quatre nouveaux coté pour T_{n+1}. Le nombre de cotés est donc, à chaque itération, multiplié par 4. Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, T_n admet $3 \cdot 4^n$ cotés.

Durant la même procédure, lorsque l'on passe de T_n à T_{n+1} tous les cotés de T_{n+1} ont la même longueur qui est le tiers de la longueur des cotés de T_n. Ainsi pour T_0, c'est 1, pour T_1 c'est $1/3$ et ainsi de suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la longueur de chaque coté de T_n est $1/3^n$.

(3) Avec la question précédente, il est clair que le périmètre de T_n vaut $P_n = 3 \cdot 4^n \times 3^{-n} = 3(4/3)^n$.

(4) $4/3 > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} P_n = +\infty$.

(5) Lorsque l'on passe de T_n à T_{n+1}, on ajoute $3 \cdot 4^n$ triangles équilatéraux de coté de longueur $1/3^{n+1}$. Donc d'après la première question, l'accroissement d'aire vaut

$$\mathscr{A}(T_{n+1}) - \mathscr{A}(T_n) = 3 \cdot 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4(3^{n+1})^2} = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

(6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\mathscr{A}(T_n) = \mathscr{A}(T_0) + \sum_{k=0}^{n}(\mathscr{A}(T_k) - \mathscr{A}(T_{k-1})) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}(T_n) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$

(8) Le flocon de Koch est donc unn objet d'aire finie mais de périmètre infini (il est donc infiniment plus sage de tondre un prés de la forme d'un flocon de Koch que le cloturer !).

Solution du problème 2 : On suppose qu'il existe une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $f \circ f = \exp$.

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$ alors $e^x = f(f(x)) = f(x) = x$.

(2) Il est bien connu que l'équation $e^x = x$ n'a pas de solutions pour $x \in \mathbb{R}$ (étudier $\varphi(x) = e^x - x$ en déduire que $e^x - x \geq 1$, Taylor-Lagrange marche aussi). Donc, vu (1), l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution.

(3) Par (2), l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution ; f étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que $f(x) - x$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.

(4) Avec la question précédente, ou bien $f(x) < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou bien $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Supposons que l'on se trouve dans la première situation, et soit $x_i n\mathbb{R}$. $f(x) < x$ implique $e^{f(x)} < e^x = f(f(x))$, soit en posant $u = f(x)$: $e^u < f(u)$. Comme $x < e^x$ sur $\mathbb{R}$, on aura $u < e^u < f(u)$ i.e. $u < f(u)$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

(5) (3) et (4) impliquent $f(x) > x$, pour tout réel x.

(6) Sinon, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \geq e^a = f(f(a))$; soit en posant $b = f(a)$: $b \geq f(b)$ ce qui est exclus vu (5).

(7) Les inégalités (5) et (6) donnent $0 < f(0) < e^0 = 1$.

(8) $f(e^x) = f(f \circ f(x)) = f \circ f(f(x)) = e^{f(x)}$.

(9) Vu (5) : $f(x) > x$ sur $\mathbb{R}$ implique $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

(10) La question (8) assure la positivité de $f(e^x)$ pour tout x réel. Dans cette égalité, prenons le log et faisons tendre x vers $-\infty$, par continuité de f en 0 et du log en $f(0)$: $\log f(0) = \lim_{x \to -\infty} \log f(e^x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) < 0$ puisque $0 < f(0) < 1$.

(11) $f(a) = f(b)$ impliquent $e^a = f(f(a)) = f((b)) = e^b$ soit $a = b$ par injectivité de l'exponentielle : f est bien injective. Toute fonction continue et injective sur $\mathbb{R}$ est strictement monotone c'est le cours. Elle ne peut être que croissante vu les limites au bornes du domaine calculées en (9) et (10). ■