Université Paul Sabatier **Juin 2012**

☯ L2 PCP, Préparation à l'oral : Suites er Séries de Fonctions. ☯

Exercice 1. *Etudier la suite de fonctions définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par* $f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{2n} x^k\right)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. *Etudier la suite de fonctions définie sur* $[0,1]$ *par* $f_n(x) = 4^n \left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. *Etudier la suite de fonctions définie sur* $[1, +\infty[$ *par* $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$.

Exercice 4. *Etudier la suite de fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = \sqrt[2n]{1 + x^{2n}}$.

Exercice 5. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}$ *:* $f_n(x) = \sqrt{n+1}\sin^n(x)\cos(x)$. *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$*, la convergence est-elle uniforme sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 6. *Etudier la convergence simple et uniforme sur* $\mathbb{R}_+$ *de la suite de fonctions* $f_n \ : \ x \mapsto x^n e^{-x}/n!$ *et déterminer* $\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt$. *Commentaire ?*

Exercice 7. *Montrer que* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2 n^4}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*, de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^\star$ *et étudier sa dérivabilité à l'origine.*

Exercice 8. *Etudier* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ *sur son domaine de définition, continuité, dérivabilité (en particulier à l'origine...).*

Exercice 9. *Montrer que* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Arctan(nx)}{n^2}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*, de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^\star$ *et étudier sa dérivabilité à l'origine.*

4 juin 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr